Equations différentielles linéaires

Résolution d'équations d'ordre 1

Exercice 1 [01541] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $y' + 2y = x^2$ b) $y' + y = 2\sin x$
c) $y' - y = (x+1)\mathrm{e}^x$ d) $y' + y = x - \mathrm{e}^x + \cos x$

Exercice 2 [01543] [correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $I = \mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$ l'équation différentielle

$$xy' - \alpha y = 0$$

Exercice 3 [01542] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$ b) $(x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{3/2}$
c) $(x^2+1)^2 y' + 2x(x^2+1)y = 1$

Exercice 4 [01280] [correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés
a) $(1+\mathrm{e}^x)y' + \mathrm{e}^x y = (1+\mathrm{e}^x)$ sur $\mathbb{R}$
b) $(\mathrm{e}^x - 1)y' + \mathrm{e}^x y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$,
c) $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$

Exercice 5 [01281] [correction]
Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle suivante

$$\sqrt{1-x^2}\,y' + y = 1$$

Exercice 6 [01379] [correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés
a) $(2+\cos x)y' + \sin(x)y = (2+\cos x)\sin x$ sur $\mathbb{R}$
b) $(1+\cos^2 x)y' - \sin 2x.y = \cos x$ sur $\mathbb{R}$
c) $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$ sur $]0,\pi[$,
d) $(\sin x)^3 y' = 2(\cos x)y$ sur $]0,\pi[$.

Exercice 7 [01434] [correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés
a) $\mathrm{ch}x.y' - \mathrm{sh}x.y = \mathrm{sh}^3 x$ sur $\mathbb{R}$
b) $y' - \frac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}y = \mathrm{sh}x$ sur $\mathbb{R}$
c) $\mathrm{sh}(x)y' - \mathrm{ch}(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$,

Exercice 8 [01544] [correction]
Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions

$$f(x) = \frac{C+x}{1+x^2}$$

seraient les solutions.

Résolution d'équations d'ordre 2

Exercice 9 [01549] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + y = 0$
b) $y'' - 3y' + 2y = 0$
c) $y'' + 2y' + 2y = 0$

Exercice 10 [01450] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^x$
b) $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^x$

Exercice 11 [01435] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + 2y' + 2y = \sin x$
b) $y'' + y = 2\cos^2 x$

Exercice 12 [01460] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + y = \mathrm{sh}x$
b) $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{ch}x$

Exercice 13 [01550] [correction]
Soient ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts.
Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 14 [03849] [correction]
Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = \sin(2x)$$

Exercice 15 [01551] [correction]
Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Problèmes se ramenant à la résolution d'une équation différentielle

Exercice 16 [01548] [correction]
Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Exercice 17 [01546] [correction]
Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 18 [01552] [correction]
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x$$

Exercice 19 [03197] [correction]
Déterminer les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2 - x)$$

Exercice 20 [01545] [correction]
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables telles que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, f(s + t) = f(s)f(t)$$

Exercice 21 [00379] [correction]
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x)$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + C\mathrm{e}^{-2x}$.
b) $y(x) = -\cos x + \sin x + C\mathrm{e}^{-x}$.
c) $y(x) = \left(x^2/2 + x\right)\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x$.
d) $y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + C\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 2 : [énoncé]
Sur I,

$$xy' - \alpha y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{\alpha}{x}y$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

$$\int \frac{\alpha}{x}\,\mathrm{d}x = \alpha \ln|x|$$

donc la solution générale de l'équation étudiée est

$$y(x) = C\,|x|^\alpha$$

Exercice 3 : [énoncé]
a) $y(x) = \frac{C-x}{1+x^2}$
b) $y(x) = \sqrt{1+x^2}(C+x)$
c) $y(x) = \frac{C+\arctan x}{1+x^2}$

Exercice 4 : [énoncé]
a) $y(x) = \frac{C+x+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$
b) $y(x) = \frac{C+x}{\mathrm{e}^x-1}$
c) $y(x) = \frac{C+\ln x}{(1+\ln^2 x)}$

Exercice 5 : [énoncé]
On obtient la solution générale

$$y(x) = 1 + C\mathrm{e}^{\arccos x}$$

ou encore, et c'est équivalent

$$y(x) = 1 + C'\mathrm{e}^{-\arcsin x}$$

Exercice 6 : [énoncé]
a) $y(x) = (2+\cos x)(C - \ln(2+\cos x))$
b) $y(x) = \frac{C+\sin x}{1+\cos^2 x}$
c) $y(x) = C\sin x + \cos x$
d) $y(x) = C\mathrm{e}^{-1/\sin^2 x}$

Exercice 7 : [énoncé]
a)$y(x) = \mathrm{ch}^2 x + 1 + C\mathrm{ch}x$
b) $y(x) = (\ln(1+\mathrm{ch}x) + C)(1+\mathrm{ch}x)$
c) $y(x) = C\mathrm{sh}x - \mathrm{ch}x$

Exercice 8 : [énoncé]
En exprimant C en fonction de f et en dérivant, on peut proposer l'équation suivante

$$(1+x^2)y' + 2xy = 1$$

Exercice 9 : [énoncé]
a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$ de racines $\pm i$.
La solution générale est donc

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ de racines 1 et 2
La solution générale est donc

$$y(x) = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x}$$

c) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$ de racines $-1 \pm i$.
La solution générale est donc

$$y(x) = (\lambda\cos x + \mu\sin x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Exercice 10 : [énoncé]
a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+2r+1=0$ de racine double -1
La solution générale homogène est donc

$$y(x)=(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^{-x}$$

Une solution particulière est à rechercher de la former $y(x)=\alpha\mathrm{e}^x$. On obtient $\alpha=1/4$
La solution générale est alors

$$y(x)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^x+(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^{-x}$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+r-2=0$ de racines 1 et -2
La solution générale homogène est donc

$$y(x)=\lambda\mathrm{e}^x+\mu\mathrm{e}^{-2x}$$

Une solution particulière est à rechercher de la former $y(x)=\alpha x\mathrm{e}^x$. On obtient $\alpha=1/3$.
La solution générale est alors

$$y(x)=\frac{1}{3}x\mathrm{e}^x+\lambda\mathrm{e}^x+\mu\mathrm{e}^{-2x}$$

Exercice 11 : [énoncé]
a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+2r+2=0$ de racines $-1\pm i$.
La solution générale homogène est donc $y(x)=(\lambda\cos x+\mu\sin x)\,\mathrm{e}^{-x}$
En déterminant une solution particulière à l'équation complexe

$$z''+2z'+2z=\mathrm{e}^{ix}$$

on obtient par sa partie imaginaire une solution particulière de l'équation en cours.
Au final, la solution générale est

$$y(x)=-\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x+(\lambda\cos x+\mu\sin x)\mathrm{e}^{-x}$$

b)) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+1=0$ de racines $\pm i$.
La solution générale homogène est donc $y(x)=\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$
On décompose le second membre par la formule

$$2\cos^2 x=\cos(2x)+1$$

On détermine une solution particulière pour chacun de deux termes puis, par le principe de superposition des solutions, on exprime la solution générale

$$y(x)=1-\frac{1}{3}\cos 2x+\lambda\cos x+\mu\sin x$$

Exercice 12 : [énoncé]
a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+1=0$ de racines $\pm i$.
La solution générale homogène est donc $y(x)=\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$
$y(x)=\frac{1}{2}\mathrm{sh}(x)$ est solution apparente de l'équation complète.
La solution générale est alors

$$y(x)=\frac{1}{2}\mathrm{sh}(x)+\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $(r-1)^2=0$ de racine double 1.
La solution générale homogène est donc $y(x)=(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^x$
Le second membre de l'équation se décompose

$$2\mathrm{ch}(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$$

On détermine une solution particulière pour chacun des deux termes et, par le principe de superposition, on peut exprimer la solution générale

$$y(x)=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}+(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^x$$

Exercice 13 : [énoncé]
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+\omega^2=0$ de racines $\pm i\omega$.

La solution générale homogène est donc $y(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$
En introduisant l'équation complexe

$$z'' + \omega^2 z = \mathrm{e}^{i\omega_0 x}$$

et en considérant la partie réelle d'une solution particulière de celle-ci, on peut exprimer la solution générale

$$y(x) = \frac{\cos(\omega_0 x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$$

Les conditions initiales déterminent λ et μ

$$y(x) = \frac{\cos(\omega_0 x) - \cos(\omega x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \cos(\omega x)$$

Exercice 14 : [énoncé]
(E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

de racines 1 et 2
Solution générale homogène :

$$y(x) = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x} \text{ avec } \lambda, \mu \text{ parcourant } \mathbb{R}$$

Cherchons une solution particulière à l'équation

$$z'' - 3z' + 2z = \mathrm{e}^{2ix}$$

de la forme $z(x) = \lambda\mathrm{e}^{2ix}$. On est amené à résoudre

$$(-2 - 6i)\lambda\mathrm{e}^{2ix} = \mathrm{e}^{2ix}$$

On obtient

$$z(x) = \frac{3i - 1}{20}\mathrm{e}^{2ix}$$

et l'on peut donc proposer la solution particulière

$$y(x) = \frac{3}{20}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x)$$

La solution générale de (E) est alors

$$y(x) = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{20}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x) \text{ avec } \lambda, \mu \text{ parcourant } \mathbb{R}$$

Exercice 15 : [énoncé]
Posons $\Delta = a^2 - 4b$ discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.
Si $\Delta > 0$ alors les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ seront bornées sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, les deux solutions de l'équation $r^2 + ar + b = 0$ sont négatives i.e. $a \geqslant 0$ (opposé de la somme des racines) et $b \geqslant 0$ (produit des racines).
Si $\Delta = 0$ alors les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ seront bornées sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $a > 0$.
Si $\Delta < 0$ alors les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ seront bornées sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, elles sont de parties réelles négatives i.e. $a \geqslant 0$.
Au final les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $a, b \geqslant 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

Exercice 16 : [énoncé]
Une telle fonction est solution d'une équation différentielle de la forme $y' + y = C$ et vérifie $y(0) + y(1) = C$.
Les solutions de cette équation différentielle sont $y(x) = C + D\mathrm{e}^{-x}$.

$$y(0) + y(1) = 2C + D\frac{1 + \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = C \Leftrightarrow D = -\frac{\mathrm{e}C}{\mathrm{e} + 1}$$

Les solutions sont les

$$f(x) = C\frac{\mathrm{e} + 1 - \mathrm{e}^{-x+1}}{\mathrm{e} + 1}$$

Inversement : ok

Exercice 17 : [énoncé]
Supposons f solution.
f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' + y + \lambda = 0$ donc $f(x) = C\mathrm{e}^{-x} - \lambda$. De plus, pour une telle fonction,

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{C(\mathrm{e} - 1)}{\mathrm{e}} - \lambda$$

et donc une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\frac{C(\mathrm{e} - 1)}{\mathrm{e}} - \lambda = \lambda$$

d'où

$$\lambda = \frac{C(\mathrm{e} - 1)}{2\mathrm{e}}$$

Finalement, les solutions sont

$$f(x) = C\mathrm{e}^{-x} - \frac{C(\mathrm{e} - 1)}{2\mathrm{e}}$$

Exercice 18 : [énoncé]
Analyse : Supposons f est solution. On a

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - f(-x)$$

La fonction f' est dérivable et

$$f''(x) = \mathrm{e}^x + f'(-x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - f(x)$$

La fonction f est donc de l'équation différentielle $y'' + y = 2\mathrm{ch}x$
Après résolution

$$f(x) = \mathrm{ch}x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Synthèse : Une telle fonction est solution du problème si, et seulement si,

$$\mathrm{sh}x - C_1 \sin x + C_2 \cos x + \mathrm{ch}x + C_1 \cos x - C_2 \sin x = \mathrm{e}^x$$

Ce qui donne $C_1 + C_2 = 0$.
Finalement les solutions du problème posé sont

$$f(x) = \mathrm{ch}x + C(\cos x - \sin x)$$

Exercice 19 : [énoncé]
Soit f une fonction solution (s'il en existe).
La dérivée de f apparaît dérivable et donc f est deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -f'(2-x) = -f(x)$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant de solution générale

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$$

En injectant dans l'équation étudiée, une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\begin{cases} -\lambda = \lambda \sin 2 - \mu \cos 2 \\ \mu = \lambda \cos 2 + \mu \sin 2 \end{cases}$$

ce qui après résolution équivaut à l'équation

$$(1 + \sin 2)\lambda = (\cos 2)\mu$$

En écrivant $\lambda = (\cos 2)\alpha$, on a $\mu = (1 + \sin 2)\alpha$ et la solution générale de l'équation étudiée est de la forme

$$f(x) = \alpha\left(\sin x + \cos(2-x)\right) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

Exercice 20 : [énoncé]
Supposons f solution. En évaluant la relation en $s = t = 0$ on obtient
$f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$
En dérivant la relation en t on obtient : $f'(s+t) = f(s)f'(t)$ puis en évaluant en $t = 0$: $f'(s) = f'(0)f(s)$.
Ainsi f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = \alpha y$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.
On en déduit $f(x) = C\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $C, \alpha \in \mathbb{C}$.
Parmi ces solutions, celles vérifiant $f(0) = 0$ ou 1 sont $f(x) = 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$.
Inversement, ces fonctions sont solutions.

Exercice 21 : [énoncé]
Soit f une solution.
Pour $x = y = 0$ on obtient $f(0) = 0$.
De plus

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\mathrm{e}^x f(h) + \mathrm{e}^h f(x) - f(x)}{h} = \mathrm{e}^x \frac{f(h) - f(0)}{h} + \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} f(x)$$

donc

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \mathrm{e}^x f'(0) + f(x)$$

Par suite f est dérivable en x et $f'(x) = f'(0)\mathrm{e}^x + f(x)$.
La fonction f est alors solution d'une équation différentielle de la forme
$y' = y + C\mathrm{e}^x$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.
Après résolution, on obtient

$$f(x) = Cx\mathrm{e}^x$$

Inversement, de telles fonctions sont solutions.

Intégration sur un segment

Continuité uniforme

Exercice 1 [01818] [correction]
Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2 [01819] [correction]
Montrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 3 [01820] [correction]
Montrer que $x \mapsto x \ln x$ est uniformément continue sur $]0,1]$.

Exercice 4 [02821] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe des réels positifs a et b tels que

$$\forall x \geqslant 0, |f(x)| \leqslant ax + b$$

Exercice 5 [03034] [correction]
Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 6 [03035] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et tendant vers 0 à l'infini.
Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 7 [03153] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue vérifiant

$$\forall x > 0, f(nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$.

Fonctions continues par morceaux

Exercice 8 [02642] [correction]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier.
Montrer qu'il existe une subdivision σ du segment $[a,b]$ adaptée à f telle que toute autre subdivision adaptée à f soit plus fine que σ.

Exercice 9 [00246] [correction]
La fonction $t \mapsto \sin \frac{1}{t}$ si $t > 0$ et 0 si $t = 0$ est-elle continue par morceaux sur $[0,1]$?

Calcul d'intégrales

Exercice 10 [01964] [correction]
Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \quad \text{c) } \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Exercice 11 [00284] [correction]
Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int_1^2 \ln t \,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 12 [01963] [correction]
Pour $m, n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 13 [01547] [correction]
Démontrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\int_{-1}^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = -i \int_0^\pi Q(\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Exercice 14 [02508] [correction]
Soit λ un réel tel que $|\lambda| \neq 1$
a) Etudier la fonction

$$f_\lambda(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2}}$$

b) Calculer

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 15 [00285] [correction]
Calculer

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\,\mathrm{d}x$$

Calcul de primitives

Exercice 16 [01960] [correction]
Déterminer les primitives suivantes :

$$\text{a) } \int t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

Exercice 17 [00279] [correction]
Déterminer les primitives suivantes :

$$\text{a) } \int \cos t \sin t\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int \tan t\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \int \cos^3 t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 18 [00280] [correction]
Déterminer les primitives suivantes :

$$\text{a) } \int \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \int \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 19 [01962] [correction]
Déterminer les primitives suivantes :

$$\text{a) } \int \frac{\mathrm{d}t}{it+1} \quad \text{b) } \int \mathrm{e}^t \cos t\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \int t \sin t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 20 [01961] [correction]
Soit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $a = \mathrm{Re}(\lambda)$ et $b = \mathrm{Im}(\lambda)$. Etablir

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t-\lambda} = \ln|t-\lambda| + i\arctan\left(\frac{t-a}{b}\right) + C^{te}$$

Intégration par parties

Exercice 21 [01979] [correction]
Déterminer les primitives suivantes :

$$\text{a) } \int t\ln t\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int t\arctan t\,\mathrm{d}t \quad \text{f) } \int t\sin^3 t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 22 [00263] [correction]
Déterminer les primitives suivantes :

$$\text{a) } \int (t^2 - t + 1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \int (t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 23 [01980] [correction]
Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln t\,\mathrm{d}t (\text{avec } n \in \mathbb{N}) \quad \text{c) } \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 24 [00287] [correction]
Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int_0^{1/2} \arcsin t\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 25 [00283] [correction]
Calculer

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 26 [03089] [correction]
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\mu\in\mathbb{R}^{+\star}$ et $f\in\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x\in[a,b],|f'(x)|\geqslant\mu \text{ et } f' \text{ monotone}$$

Montrer :

$$\left|\int_a^b \mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{\mu\pi}$$

Changement de variable

Exercice 27 [01982] [correction]
Déterminer les primitives suivantes en procédant par un changement de variable adéquat :

$$\text{a)}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\quad\text{b)}\int\frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2}\quad\text{c)}\int\frac{\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$$

Exercice 28 [00290] [correction]
Déterminer

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$$

Exercice 29 [01983] [correction]
Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat :

$$\text{a)}\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2}\quad\text{b)}\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}}\quad\text{c)}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$$

Exercice 30 [00260] [correction]
Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat

$$\text{a)}\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\quad\text{b)}\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\quad\text{c)}\int_1^2\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 31 [01984] [correction]
a) Observer

$$\int_0^{\pi/4}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/4}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire

$$\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 32 [01985] [correction]
a) Montrer que

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$$

b) En déduire

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$$

Exercice 33 [01986] [correction]
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x\in[a,b],\ f(a+b-x)=f(x)$$

Montrer que

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 34 [00188] [correction]
a) Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Etablir

$$\int_0^\pi tf(\sin t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire la valeur de

$$I_n=\int_0^\pi\frac{x\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 35 [03337] [correction]
a) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto 3x^2 - 2x^3$.
b) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 36 [03193] [correction]
Pour a et b des réels tels que $ab > 0$, on considère

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$$

a) Calculer $I(-b,-a)$, $I(1/a,1/b)$ et $I(1/a,a)$ en fonction $I(a,b)$.
b) Pour $a,b > 1$, calculer $I(a,b)$ via changement de variables $v = x + 1/x$ puis $v = 1/t$.
c) Montrer que la relation ainsi obtenue est valable pour tout a,b tels que $ab > 0$.

Exercice 37 [00282] [correction]
Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable ad hoc :

$$\text{a) } \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t} \quad \text{c) } \int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 38 [02436] [correction]
Calculer

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

Intégrales fonctions des bornes

Exercice 39 [01987] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer leur dérivée :

$$\text{a) } g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } g(x) = \int_0^x x\,f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } g(x) = \int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 40 [01988] [correction]
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t} \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = 1$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.
b) Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
c) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 41 [01989] [correction]
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On définit $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $F''(x)$.
b) En déduire

$$F(x) = \int_0^x \int_u^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

Exercice 42 [01990] [correction]
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t) g(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x) g(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
c) Achever la résolution de cette équation différentielle.

Exercice 43 [01991] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \neq 0, F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0. On effectue ce prolongement.
b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale
c) Montrer que F est dérivable en 0 et observer $F'(0) = 0$.

Exercice 44 [00088] [correction]
Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = \int_{2x+y}^{2y+x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer f.

Exercice 45 [00276] [correction]
Pour $x \in \left]0, 1\right[$, on pose

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

a) Montrer que φ est bien définie et que cette fonction se prolonge par continuité en 0 et en 1.
b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{x - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 46 [02444] [correction]
Soit

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

a) Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$, la limite en $+\infty$ de $f(x)/x$ et montrer que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ mais qu'elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}^+$.
c) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

Exercice 47 [03788] [correction]
a) Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
b) Déterminer la limite de f en 0.

Exercice 48 [00275] [correction]
Soit

$$f : x \in \mathbb{R}^\star \mapsto \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t}\,\mathrm{d}t$$

a) Etudier la parité de f. On étudie désormais f sur $\left]0, +\infty\right[$.
b) Prolonger f par continuité en 0.
c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
d) Branches infinies, allure.

Exercice 49 [00277] [correction]
Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Prolonger g par continuité en 0.
b) Montrer que la fonction ainsi obtenue est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 50 [03789] [correction]
Etude et graphe de la fonction

$$x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$$

On préciser le comportement de la fonction quand $x \to 0$ et quand $x \to \pm\infty$.

Exercice 51 [02617] [correction]
Pour tout $x \in \left[1, +\infty\right[$, on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3 - 1}}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que la fonction F est bien définie, continue sur $[1,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
Exprimer sa dérivée $F'(x)$
b) Etudier la dérivabilité de F en 1. Préciser la tangente au graphe de F en 1.
c) Etudier la limite de F en $+\infty$.
d) Justifier que F réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle à préciser.
e) Justifier que F^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et solution de l'équation différentielle

$$yy' = \sqrt{y^3-1}$$

f) Etudier la dérivabilité de F^{-1} en 0.

Sommes de Riemann

Exercice 52 [01998] [correction]
Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} \quad \text{c) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

Exercice 53 [01999] [correction]
En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

Exercice 54 [00744] [correction]
Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 55 [02785] [correction]
Etudier les limites de $\left(\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$ et de $\left(\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}$.

Exercice 56 [02786] [correction]
Calculer les limites de

$$\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ et } \sum_{k=1}^n \sin^2\frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 57 [02787] [correction]
Si $n\in\mathbb{N}^\star$ et $x\in\mathbb{R}$, soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$.
Soit x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f_n atteint un maximum local. Calculer $\lim f_n(x_n)$.

Exercice 58 [03198] [correction]
Déterminer un équivalent quand $n\to+\infty$ de

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}$$

Exercice 59 [03768] [correction]
Etudier la suite suivante

$$u_n = \frac{r(1)+r(2)+\cdots+r(n)}{n^2}$$

avec $r(k)$ le reste de la division euclidienne de n par k.
Indice : étudier la suite suivante

$$v_n = \frac{(n-r(1))+(n-r(2))+\cdots+(n-r(n))}{n^2}$$

Exercice 60 [03428] [correction]
a) Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}$$

b) Pour $\alpha>1$, déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p^\alpha}$$

c) En déduire

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{2n}\sin\left(\frac{1}{p}\right)$$

Exercice 61 [02664] [correction]
a) Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Montrer que

$$X^{2n}-1=(X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2-2X\cos\frac{k\pi}{n}+1)$$

b) Soit un réel $a\neq\pm1$; déduire de a) la valeur de

$$\int_0^\pi \ln(a^2-2a\cos t+1)\,\mathrm{d}t$$

Formules de Taylor

Exercice 62 [02816] [correction]
Enoncer et établir la formule de Taylor avec reste intégrale.

Exercice 63 [00291] [correction]
Etablir que pour tout $x\in[0,\pi/2]$,

$$x-\frac{1}{6}x^3\leqslant\sin x\leqslant x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$$

Exercice 64 [03217] [correction]
[Egalité de Taylor-Lagrange]
Soient $f:I\to\mathbb{R}$ et $a\in I$. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors

$$\forall x\in I,\exists c\in I,f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Exercice 65 [02001] [correction]
Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$

$$\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}\,\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}$$

En déduire

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

Exercice 66 [02002] [correction]
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln 2$$

Exercice 67 [00295] [correction]
En exploitant une formule de Taylor adéquate établir

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2$$

Exercice 68 [02000] [correction]
Soit $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, deux fois dérivables, telles que

$$f(0)=f(1)=0\text{ et }f''=g$$

Exercice 69 [02003] [correction]
Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a\in\mathbb{R}$.
Déterminer

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$$

Exercice 70 [00293] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
On suppose

$$f(x),f''(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Montrer que

$$f'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Exercice 71 [00297] [correction]
Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k/n^2) - nf(0)$$

Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 72 [00296] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f''(0) \neq 0$.
a) Montre que pour chaque $x \in \mathbb{R}^\star$, il existe $\theta \in]0,1[$ vérifiant la relation

$$f(x) = f(0) + xf'(\theta x)$$

b) Montrer qu'au voisinage de 0 ce θ est unique.
c) Déterminer la limite de θ quand $x \to 0$.

Exercice 73 [02817] [correction]
a) Montrer, pour tout $x \in]0,\pi/2[$, l'existence de $\theta_x \in]0,1[$ tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(x\theta_x)$$

b) Etudier la limite de θ_x quand x tend vers 0 par valeur supérieure.

Exercice 74 [00255] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ telle que

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$$

a) Montrer que

$$\forall 0 \leqslant p \leqslant n, \varphi^{(p)}(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n-p})$$

b) On introduit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall 0 \leqslant p < n, \psi^{(p)}(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n-p-1})$$

En déduire que ψ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.
c) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.
d) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telles que

$$f(0) = 0,\ g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } g'(0) \neq 0$$

Montrer que f/g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

Propriétés de l'intégrale

Exercice 75 [01965] [correction]
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $c \in]a,b[$.
Montrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \max\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t, \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 76 [01967] [correction]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ si, et seulement si, } f \geqslant 0 \text{ ou } f \leqslant 0$$

Exercice 77 [01767] [correction]
f étant continue sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Exercice 78 [03051] [correction]
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$.
A quelle condition portant sur f a-t-on

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|\ ?$$

Exercice 79 [01968] [correction]
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 80 [01969] [correction]
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer :

$$\exists c\in\,]a,b[\,,\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=f(c)$$

Exercice 81 [01970] [correction]
[Formule de la moyenne]
Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues avec $g\geqslant 0$.
Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 82 [03092] [correction]
[Seconde formule de la moyenne]
Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues avec f décroissante et positive.
a) Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\int_{a_k}^{a_{k+1}} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } a_k=a+k\frac{(b-a)}{n}$$

Montrer que

$$S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

b) On introduit G la primitive de g s'annulant en a.
Montrer que

$$f(a)\min_{[a,b]} G\leqslant S_n\leqslant f(a)\max_{[a,b]} G$$

c) En déduire qu'il existe $c\in[a,b]$ vérifiant

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues avec f monotone.
Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t+f(b)\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 83 [03188] [correction]
Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ positive et décroissante sur $I=[a,b]$.
Soit g une fonction continue sur I. On définit $G:I\to\mathbb{R}$ par la relation

$$G(x)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer qu'il existe $m,M\in\mathbb{R}$ tel que

$$G([a,b])=[m,M]$$

b) Montrer que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=f(b)G(b)-\int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$$

c) En déduire qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 84 [01971] [correction]
Soit $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ continue.
a) Montrer que si

$$\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=0$$

alors il existe $a\in\,]0,\pi[$ tel que f s'annule en a.
b) Montrer que si

$$\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t=0$$

alors f s'annule 2 fois sur $]0,\pi[$.
(indice : on pourra regarder $\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\,\mathrm{d}t$).

Exercice 85 [01972] [correction]
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\}, \int_a^b t^k f(t) \,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a, b]$.

Exercice 86 [01974] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Montrer que la fonction

$$x \mapsto \int_a^b f(t) \sin(xt) \,\mathrm{d}t$$

est lipschitzienne.

Exercice 87 [02966] [correction]
Soient $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t = 0$$

m le minimum de f et M son maximum.
Prouver

$$\int_0^1 f^2(t) \,\mathrm{d}t \leqslant -mM$$

Exercice 88 [02967] [correction]
Soient f et g deux fonctions croissantes et continues sur $[0, 1]$. Comparer

$$\int_0^1 f(t)g(t) \,\mathrm{d}t \text{ et } \left(\int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_0^1 g(t) \,\mathrm{d}t\right)$$

Limites d'intégrales

Exercice 89 [01978] [correction]
Déterminer les limites suivantes sans pour autant calculer les intégrales correspondantes :

$$\text{a) } \lim_{x \to 0^+} \int_{-x}^{x} \sin t^2 \,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \quad \text{c) } \lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 90 [00286] [correction]
Déterminer les limites suivantes sans pour autant calculer les intégrales correspondantes :

$$\text{a) } \lim_{x \to 0^+} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t}{t} \quad \text{b) } \lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t} \,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 91 [01976] [correction]
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t) \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Exercice 92 [01977] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t$$

Utilisation de primitives

Exercice 93 [03380] [correction]
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer qu'il existe $x \in \left]0, 1\right[$ vérifiant

$$\int_0^x t f(t) \,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 94 [01966] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$. On suppose que

$$\int_x^{x+T} f(t) \,\mathrm{d}t = C^{te}$$

Montrer que f est périodique.

Exercice 95 [01973] [correction]
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f possède une unique primitive F telle que

$$\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 96 [00057] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$.
a) Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

b) Si $f(1) = 0$, améliorer l'inégalité obtenue en a).

Suites dont le terme général est défini par une intégrale

Exercice 97 [01994] [correction]
Pour p et q entiers naturels, on pose :

$$I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p(b-t)^q\,\mathrm{d}t$$

a) Former une relation de récurrence liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.
b) Donner une expression de $I_{p,q}$ à l'aide de factoriels.

Exercice 98 [01997] [correction]
[Intégrales de Wallis]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t$ et $I_n > 0$
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

c) Donner une expression de I_n à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$.
d) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

e) Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 99 [01992] [correction]
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

a) Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.
b) Montrer que

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

c) En déduire que

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Exercice 100 [01993] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$$

a) Calculer I_0 et I_1.
b) Etablir une relation liant I_n et I_{n+1}.
c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < I_n < \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

d) Déterminer la limite puis un équivalent simple de (I_n) .
e) Soit (u_n) une suite réelle définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n$$

On suppose que $a \neq I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \to +\infty$.

Exercice 101 [01995] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, \pi[$.
a) Justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos t - \cos x}\,\mathrm{d}t$$

b) Exprimer I_n. On pourra commencer par calculer $I_{n+1} + I_{n-1}$.

Exercice 102 [01996] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^n}$$

a) Calculer u_0, u_1, u_2.
b) Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante.
c) Montrer que $u_n \to 1$.
d) Etablir

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1 + x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1 + x^n)\,\mathrm{d}x$$

e) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1 + x^n)\,\mathrm{d}x = 0$$

et en déduire que

$$u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 103 [00288] [correction]
Pour $p, q \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1 - t)^q\,\mathrm{d}t$$

Exercice 104 [00289] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t$$

a) Pour $n \geqslant 2$, former une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}.
b) En déduire l'expression de I_n selon la parité du naturel n.

Exercice 105 [02981] [correction]
Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{t}{1 + t^2}\right)^n \mathrm{d}t$$

Exercice 106 [00322] [correction]
Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x + 1}\,\mathrm{d}x$$

a) Montrer que $I_n \to 0$ en décroissant.
b) Simplifier $I_n + I_{n+1}$ et en déduire une expression de I_n à l'aide d'un symbole sommatoire.
c) Déterminer

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

d) Exploiter

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1}\mathrm{d}x$$

pour déterminer

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n + 1}$$

Exercice 107 [01860] [correction]
a) Calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}$$

b) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$$

c) Justifier

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n + 3}$$

d) En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

Calcul de primitives de fonctions rationnelles

Exercice 108 [01232] [correction]
Déterminer les primitives des expressions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{x^5}{1+x^{12}}$ b) $\dfrac{1}{x(x^2-1)}$ c) $\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$
d) $\dfrac{1}{x^2-2x+2}$ e) $\dfrac{x}{x^2+2x+2}$ f) $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$
g) $\dfrac{1}{x^3+1}$ h) $\dfrac{x}{x^3-1}$ i) $\dfrac{x^4+1}{x^4-1}$
j) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$ k) $\dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}$ l) $\dfrac{1}{x^4+1}$

Exercice 109 [01233] [correction]
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 110 [01234] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On désire déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 de la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

a) Justifier l'existence et l'unicité de la fonction cherchée. Celle-ci est désormais notée F_n.
b) Calculer $F_1(x)$.
c) En procédant au changement de variable $x = \tan\theta$, déterminer $F_2(x)$.
d) En s'aidant d'une intégration par parties, former une relation de récurrence entre $F_{n+1}(x)$ et $F_n(x)$.
e) Calculer $F_3(x)$.

Calcul de primitives ou d'intégrales se ramenant à une fonction rationnelle

Exercice 111 [01235] [correction]
Déterminer les primitives des expressions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ b) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x}$
c) $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$

Exercice 112 [01236] [correction]
Calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$$

Exercice 113 [01237] [correction]
Déterminer les primitives des expressions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{\cos x}{1+\cos^2 x}$ b) $\dfrac{\sin x}{1+\sin^2 x}$
c) $\dfrac{1}{\cos^4 x}$ d) $\dfrac{1}{\cos^3 x}$

Exercice 114 [01238] [correction]
Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{3+\cos x}$$

Exercice 115 [03774] [correction]
Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{3+\cos^2 t}$$

Exercice 116 [01239] [correction]
Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x\cos x}$ c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$

Exercice 117 [01240] [correction]
Pour $\alpha \in]0, \pi[$, calculer
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha \cos x} \, \mathrm{d}x$$

Exercice 118 [01241] [correction]
Déterminer les primitives des fonctions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{\mathrm{th}x}{1 + \mathrm{ch}x}$ b) $\dfrac{\mathrm{ch}x}{1 + \mathrm{ch}^2 x}$
c) $\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x + \mathrm{ch}x}$ d) $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^3 x}$

Exercice 119 [01242] [correction]
Calculer
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}x}$$

Exercice 120 [01243] [correction]
Déterminer les primitives des fonctions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{x}{1 + \sqrt{x+1}}$ b) $\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ c) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$

Exercice 121 [01244] [correction]
Déterminer les primitives des fonctions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{x+1}{\sqrt{2 - x^2}}$ b) $\dfrac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$ c) $\sqrt{x - x^2 + 6}$
d) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ e) $\dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}$ f) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

Exercice 122 [01245] [correction]
Sur $]-1/2, +\infty[$, déterminer
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

Exercice 123 [01246] [correction]
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+3)}$ b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}(x+4)}$ c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Pour $y \geqslant x \geqslant 0$,

$$(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2 = y + x - 2\sqrt{xy} \leqslant y - x$$

donc

$$\sqrt{y}-\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x}$$

Par symétrie

$$\forall x, y \geqslant 0, \left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|y-x|}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons $\eta = \varepsilon^2 > 0$.
Pour tout $x, y \geqslant 0$,

$$|y-x| \leqslant \eta \Rightarrow \left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|y-x|} \leqslant \sqrt{\eta} = \varepsilon$$

La fonction racine carrée est donc uniformément continue.

Exercice 2 : [énoncé]
Par l'absurde supposons que $x \mapsto \ln x$ soit uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y > 0,\ |y-x| \leqslant \eta \Rightarrow |\ln y - \ln x| \leqslant \varepsilon$$

Pour $y = x + \eta$,

$$|\ln y - \ln x| = \ln\left(\frac{x+\eta}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

Absurde.

Exercice 3 : [énoncé]
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

f est continue sur le segment $[0,1]$, donc uniformément continue sur $[0,1]$ et donc a fortiori sur $]0,1]$.

Exercice 4 : [énoncé]
Pour $\varepsilon = 1 > 0$ l'uniforme continuité assure l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1$$

Posons $n = \lfloor x/\alpha \rfloor$. On a $|f(\alpha) - f(0)| \leqslant 1$, $|f(2\alpha) - f(\alpha)| \leqslant 1, \ldots,$
$|f(n\alpha) - f((n-1)\alpha)| \leqslant 1$ et $|f(x) - f(n\alpha)| \leqslant 1$ donc en sommant
$|f(x) - f(0)| \leqslant n+1$ puis $|f(x)| \leqslant \lfloor x/\alpha \rfloor + 1 + |f(0)| \leqslant ax + b$ avec $a = 1/\alpha$ et $b = 1 + |f(0)|$.

Exercice 5 : [énoncé]
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1[\,, |y-x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant 1$$

Par suite, pour tout $x \in [1-\alpha, 1[$, on a $|f(x) - f(1-\alpha)| \leqslant 1$ puis
$|f(x)| \leqslant 1 + |f(1-\alpha)|$.
De plus, la fonction f est continue donc bornée sur le segment $[0, 1-\alpha]$ par un certain M.
On a alors f bornée sur $[0,1[$ par $\max\{M, 1 + |f(1-\alpha)|\}$.

Exercice 6 : [énoncé]
Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque f tend vers 0 en $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in [A, +\infty[$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon/2$.
Puisque la fonction f est continue, elle est continue sur le segment $[0, A+1]$ et donc uniformément continue sur ce segment en vertu du théorème de Heine.
Par suite il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0, A+1]^2, |y-x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Posons $\alpha' = \min\{\alpha, 1\} > 0$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $|x-y| \leqslant \alpha'$.
Quitte à échanger, supposons que x est le plus petit de x et y.
Si $x \in [0, A]$ alors $x, y \in [0, A+1]$ et $|y-x| \leqslant \alpha$ donc $|f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
Si $x \in [A, +\infty[$ alors $x, y \in [A, +\infty[$ donc $|f(y) - f(x)| \leqslant |f(y)| + |f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 7 : [énoncé]
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall x, y > 0, |y-x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Considérons alors la suite $(f(n\alpha))$. Puisque celle-ci converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geqslant N, |f(n\alpha)| \leqslant \varepsilon$$

Posons $A = N\alpha$. Pour $x \geqslant A$, il existe $n \geqslant N$ vérifiant

$$|n\alpha - x| \leqslant \alpha$$

et donc

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(n\alpha)| + |f(n\alpha)| \leqslant 2\varepsilon$$

On peut alors conclure que f converge vers 0 en $+\infty$.

Exercice 8 : [énoncé]
Soit A l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ adaptée à f.
A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède donc un plus petit élément p.
Il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ adaptée à f.
Montrons que toute subdivision $\sigma' = (b_0, b_1, ..., b_n)$ adaptée à f est plus fine que σ.
Par l'absurde : supposons $\exists i \in \{1, 2, ..., p-1\}$ tel que $a_i \notin \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$.
On peut alors affirmer qu'il existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $a_i \in]b_{j-1}, b_j[$.
Comme σ et σ' sont adaptées à f on peut affirmer que f est constante sur $]a_{i-1}, a_i[,]a_i, a_{i+1}[$ et $]b_{j-1}, b_j[$ puis que f est constante sur $]a_{i-1}, a_{i+1}[$.
Par suite la subdivision $\sigma' = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p)$ est adaptée à f or cela contredit la définition de p.

Exercice 9 : [énoncé]
Cette fonction n'a pas de limite en 0, elle n'est donc pas continue par morceaux.

Exercice 10 : [énoncé]
Dans chaque cas la détermination d'une primitive est (assez) immédiate
a)

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

b)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

c)

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$$

Exercice 11 : [énoncé]
a) En linéarisant

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

b) On connaît une primitive du logarithme ou l'on intègre par parties

$$\int_1^2 \ln t \,\mathrm{d}t = [t\ln t - t]_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

c) On reconnaît une forme $u'/\sqrt{u}$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

Exercice 12 : [énoncé]
Si $m = n = 0$ alors

$$I_{n,n} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$$

Si $m = n \neq 0$ alors

$$I_{n,n} = \int_0^{2\pi} \cos^2(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2nt)\,\mathrm{d}t = \pi$$

Si $m \neq n$, en exploitant

$$\cos(mt)\cos(nt) = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)t + \cos(m-n)t\right)$$

on obtient

$$I_{m,n} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)t\,\mathrm{d}t = \frac{[\sin(m+n)t]_0^{2\pi}}{2(m+n)} + \frac{[\sin(m-n)t]_0^{2\pi}}{2(m-n)} =$$

Exercice 13 : [énoncé]
Par linéarité de l'intégrale, il suffit de vérifier la relation pour $Q = X^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
D'une part

$$\int_{-1}^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_{-1}^1 = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}$$

et d'autre part

$$\int_0^{\pi} Q(\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{i(n+1)}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\right]_0^{\pi} = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\pi}-1}{i(n+1)}$$

Si n est impair alors

$$\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t = 0 = -i\int_0^{\pi} Q(\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Si n est pair alors

$$\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n+1} \text{ et } \int_0^{\pi} Q(\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{-2}{i(n+1)}$$

et la relation voulue est encore vérifiée.
Une alternative plus courte, mais moins élémentaire consister à exploiter que la forme différentielle

$$\omega(x,y) = Q(z)\,\mathrm{d}z = Q(x+iy)\,(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)$$

est exacte et que donc son intégrale curviligne le long d'un pourtour fermée est nulle.

Exercice 14 : [énoncé]
a) On peut écrire

$$1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2 = (\lambda - \cos x)^2 + \sin^2 x$$

et par conséquent $1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $|\lambda| \neq 1$.
La fonction f_λ est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique et impaire. Nous limitons son étude à l'intervalle $[0,\pi]$.
Le cas $\lambda = 0$ est immédiat puisque $f_0(x) = \sin x$. On suppose dans la suite $\lambda \neq 0$.
On a

$$f_\lambda'(x) = \frac{\cos x(1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2) - \lambda\sin^2 x}{(1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2)^{3/2}}$$

$f_\lambda'(x)$ est du signe de

$$\lambda^2\cos(x) - \lambda(1+\cos^2 x) + \cos x = (\lambda\cos x - 1)(\lambda - \cos x)$$

Cette expression s'annule en changeant de signe pour $\cos x = \lambda$ ou $\cos x = 1/\lambda$.

Pour $|\lambda| < 1$,

x	0		$\arccos\lambda$		π
$f_\lambda'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_\lambda(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Pour $|\lambda| > 1$,

x	0		$\arccos 1/\lambda$		π
$f_\lambda'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_\lambda(x)$	0	$\nearrow$	$1/\lambda$	$\searrow$	0

b) Pour $\lambda = 0$, on a

$$\int_0^{\pi} f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 2$$

Pour $\lambda \neq 0$, on peut directement calculer l'intégrale en reconnaissant une former $u'/\sqrt{u}$. On obtient

$$\int_0^{\pi} f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\left[\sqrt{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2}\right]_0^{\pi} = \frac{|1+\lambda| - |1-\lambda|}{\lambda}$$

Pour $|\lambda| < 1$,

$$\int_0^{\pi} f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = 2$$

Pour $|\lambda| > 1$,

$$\int_0^{\pi} f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{|\lambda|}$$

Exercice 15 : [énoncé]
La fonction $x \mapsto \ln(1+\tan x)$ est définie et continue sur $[0,\pi/4]$ donc I existe.
$\ln(1+\tan x) = \ln(\cos x + \sin x) - \ln(\cos x)$ et $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.
Ainsi

$$I = \frac{\pi\ln 2}{8} + \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

or

$$\int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x \underset{t=\frac{\pi}{4}-x}{=} \int_0^{\pi/4} \ln\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$I = \frac{\pi\ln 2}{8}$$

Exercice 16 : [énoncé]
a) On reconnaît une forme $u'e^u$

$$\int te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C^{te}$$

b) On reconnaît une forme $u'u$

$$\int \frac{\ln t}{t}\,dt = \frac{1}{2}(\ln t)^2 + C^{te}$$

c) On reconnaît une forme u'/u

$$\int \frac{dt}{t\ln t} = \ln|\ln t| + C^{te}$$

Exercice 17 : [énoncé]
a) C'est une forme $u'u$ donc

$$\int \cos t\sin t\,dt = \frac{1}{2}\sin^2 t + C^{te}$$

b) C'est une forme u'/u donc

$$\int \tan t\,dt = -\ln|\cos t| + C^{te}$$

c) On se ramène à une forme $u'u^2$ via $\cos^2 t = 1-\sin^2 t$

$$\int \cos^3 t\,dt = \int \cos t - \int \cos t\sin^2 t = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t + C^{te}$$

Exercice 18 : [énoncé]
Dans chaque cas on reconnaît une forme $u'f(u)$
a) $\int \frac{t^2}{1+t^3}\,dt = \frac{1}{3}\ln\left|1+t^3\right| + C^{te}$ sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.
b) $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \sqrt{1+t^2} + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.
c) $\int \frac{t}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\arctan t^2 + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 : [énoncé]
a) En isolant partie réelle et imaginaire

$$\int \frac{dt}{it+1} = \frac{1}{i}\int \frac{dt}{t-i} = -i\int \frac{t+i}{t^2+1}\,dt$$

puis

$$\int \frac{dt}{it+1} = \arctan t - \frac{i}{2}\ln(t^2+1) + C^{te}$$

b) On observe

$$\int e^t\cos t\,dt = \mathrm{Re}\left(\int e^{(1+i)t}\,dt\right)$$

et

$$\int e^{(1+i)t}\,dt = \frac{1}{1+i}e^{(1+i)t} + C^{te}$$

donc

$$\int e^t\cos t\,dt = \frac{e^t}{2}(\cos t + \sin t) + C^{te}$$

c) On observe

$$\int t\sin te^t\,dt = \mathrm{Im}\left(\int te^{(1+i)t}\,dt\right)$$

et par intégration par parties

$$\int te^{(1+i)t}\,dt = \frac{t+i(1-t)}{2}e^{(1+i)t} + C^{te}$$

donc

$$\int t\sin te^t\,dt = \frac{e^t}{2}(t\sin t + (1-t)\cos t) + C^{te}$$

Exercice 20 : [énoncé]
On peut écrire

$$\frac{1}{t-\lambda} = \frac{t-a+ib}{(t-a)^2+b^2} = \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + i\frac{b}{(t-a)^2+b^2}$$

or

$$\int \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left|(t-a)^2+b^2\right| + C^{te} = \ln|t-\lambda| + C^{te}$$

et

$$\int \frac{b}{(t-a)^2+b^2}\,dt = \arctan\frac{t-a}{b} + C^{te}$$

puis la formule proposée.

Exercice 21 : [énoncé]
a) Par intégration par parties

$$\int t\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2\ln t - \int \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2 + C^{te}$$

b)Par intégration par parties

$$\int t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2\arctan t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

puis en écrivant

$$\frac{t^2}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

on obtient

$$\int t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left((t^2+1)\arctan t - t\right) + C^{te}$$

c) En écrivant $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$

$$\int t\sin^3 t\,\mathrm{d}t = \int t\sin t\,\mathrm{d}t - \int t\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

D'une part

$$\int t\sin t\,\mathrm{d}t = \sin t - t\cos t + C^{te}$$

D'autre part, par intégration par parties

$$\int t\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}t\cos^3 t + \frac{1}{3}\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\int \cos^3\,\mathrm{d}t = \int \cos t\,\mathrm{d}t - \int \cos t\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t$$

Finalement

$$\int t\sin^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\sin t - t\cos t + \frac{1}{3}t\cos^3 t + \frac{1}{9}\sin^3 t + C^{te}$$

Exercice 22 : [énoncé]
Par intégration par parties
a) $\int (t^2 - t + 1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -(t^2 + t + 2)\mathrm{e}^{-t} + C^{te}$.
b) $\int (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t = \sin t + (1-t)\cos t + C^{te}$.
c) $\int (t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t = (t+1)\mathrm{sh}t - \mathrm{ch}t + C^{te}$.

Exercice 23 : [énoncé]
Par intégration par parties
a)

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

En écrivant

$$\frac{2t^2}{1+t^2} = 2 - \frac{2}{1+t^2}$$

on obtient

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \ln 2 - 2\left[t - \arctan t\right]_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

b) Par intégration par parties

$$\int_1^{\mathrm{e}} t^n\ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{n+1}\int_1^{\mathrm{e}} t^n\,\mathrm{d}t = \frac{n\mathrm{e}^{n+1}+1}{(n+1)^2}$$

c) Par deux intégrations par parties

$$\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t = \left[t\sin(\ln t)\right]_1^{\mathrm{e}^\pi} - \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \cos(\ln t)\,\mathrm{d}t = -\left[t\cos(\ln t)\right]_1^{\mathrm{e}^\pi} - \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[t\cos(\ln t)\right]_1^{\mathrm{e}^\pi} = \frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}$$

Exercice 24 : [énoncé]
Par intégration par parties
a)

$$\int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t = \left[t\arctan t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

b)

$$\int_0^{1/2} \arcsin t\,\mathrm{d}t = \left[t\arcsin t\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{1/2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

c)

$$\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t^2\arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[t - \arctan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Exercice 25 : [énoncé]
Par intégration par parties

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$$

Exercice 26 : [énoncé]
Ecrivons

$$\int_a^b \mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}}{2i\pi f'(t)}\right]_a^b + \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{f''(t)}{f'(t)^2}\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t$$

Quitte à considérer $-f$, supposons $f'' \geqslant 0$

$$\left|\int_a^b \frac{f''(t)}{f'(t)^2}\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \frac{f''(t)}{f'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(b)}$$

et donc

$$\left|\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{|f'(b)|} + \frac{1}{|f'(a)|} + \frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(b)}\right]$$

Selon le signe (constant) de f', le terme en $f'(b)$ ou le terme en $f'(a)$ se simplifie et on obtient

$$\left|\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\mu\pi}$$

Exercice 27 : [énoncé]
a)

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u+u^3} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\arctan u + C^{te} = 2\arctan\sqrt{t} + C^{te}$$

b)

$$\int \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2} \underset{u=\ln t}{=} \int \frac{u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^u u^2} = \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C^{te} = \frac{1}{2}\ln(1+\ln^2 t) + C^{te}$$

c)

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} \underset{u=\mathrm{e}^t}{=} \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{u+1} = \int 1 - \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u = u - \ln(1+u) + C^{te} = \mathrm{e}^t - \ln(1+\mathrm{e}^t) + C^{te}$$

Exercice 28 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = \sqrt{t^2-1}$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \arctan(\sqrt{t^2-1}) + C^{te}$$

Exercice 29 : [énoncé]
a)

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u+1}} = \left[2\sqrt{u+1}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$$

c)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} \underset{u=\mathrm{e}^t}{=} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u = \left[\ln u - \ln(u+1)\right]_1^{\mathrm{e}} = \ln 2 - \ln(\mathrm{e}+1) + 1$$

Exercice 30 : [énoncé]
a)

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{t=\sin u}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{t=\sin u}{=} \int_0^{\pi/2} \sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{16}$$

c)

$$\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int_1^{\sqrt{2}} 2\ln u^2\,\mathrm{d}u = 4\left[u\ln u - u\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4$$

Exercice 31 : [énoncé]
a) Par le changement de variable $u = \pi/4 - t$

$$\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,\mathrm{d}t \int_{\pi/4}^0 -\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\,\mathrm{d}t$$

b) On a
$$\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/4}\ln(\cos t+\sin t)-\ln\cos t\,\mathrm{d}t$$
or
$$\cos t+\sin t=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$$
donc
$$\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/4}\ln\sqrt{2}+\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)-\ln\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

Exercice 32 : [énoncé]
a) Par le changement de variable $x=\frac{\pi}{2}-t$ on a
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t$$
Or
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$
donc
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$$
b) Via le changement de variable $t=\sin x$ (avec $x\in[0,\pi/2]$)
$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

Exercice 33 : [énoncé]
Par le changement de variable $t=a+b-x$
$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b(a+b-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$
donc
$$2\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=(a+b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 34 : [énoncé]
a) Par le changement de variable $u=\pi-t$, on obtient
$$I=\int_0^{\pi}tf(\sin t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}(\pi-u)f(\sin u)\,\mathrm{d}u$$
et donc
$$2I=\int_0^{\pi}tf(\sin t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}(\pi-u)f(\sin u)\,\mathrm{d}u=\pi\int_0^{\pi}f(\sin u)\,\mathrm{d}u$$
puis l'identité proposée.
b) En observant $\cos^{2n}x=(1-\sin^2 x)^n$, on peut appliquer la relation précédente
$$I_n=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$$
En coupant l'intégrale en $\pi/2$
$$I_n=\frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x\right]$$
En procédant au changement de variable $y=\pi-x$ dans la seconde intégrale
$$I_n=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$$
Enfin, en procédant au changement de variable $y=\pi/2-x$, on observe
$$I_n=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$$
et on en déduit
$$2I_n=\pi\left[\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi^2}{2}$$
Finalement
$$I_n=\frac{\pi^2}{4}$$

Exercice 35 : [énoncé]
a) L'étude des variations de $\varphi:x\mapsto 3x^2-2x^3$ est facile et l'on obtient

x	$-1/2$		0		1		$3/2$
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b) On remarque

$$\varphi\left(\frac{1}{2}+\sin t\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 3t$$

car il est connu que $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.
On a alors

$$\int_0^1 f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x \underset{x=\frac{1}{2}+\sin t}{=} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 3t\right)\cos t\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x \underset{x=\frac{1}{2}+\sin t}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 3t\right)\cos t\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $u = 3t$,

$$\int_0^1 f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin u\right)\cos\frac{u}{3}\,\mathrm{d}u$$

et

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin u\right)\cos\frac{u}{3}\,\mathrm{d}u$$

En découpant cette dernière intégrale en trois et en procédant aux changements de variables affines $v = -\pi - u$, $v = u$ et $v = \pi - u$, on obtient

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin v\right)\left(\cos\frac{v+\pi}{3}+\cos\frac{v}{3}+\cos\frac{v-\pi}{3}\right)\mathrm{d}v$$

Enfin, en développant

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin v\right)\cos\frac{v}{3}\,\mathrm{d}v$$

puis la relation demandée.

Exercice 36 : [énoncé]
a) Par parité de la fonction intégrée, on a

$$I(-b,-a) = I(a,b)$$

Par le changement de variable $u = 1/t$, on obtient

$$I(1/a,1/b) = \int_a^b \frac{1-\frac{1}{t^2}}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}}\frac{-\mathrm{d}t}{t^2} = I(a,b)$$

En particulier

$$I(1/a,a) = I(a,1/a)$$

alors que par échange des bornes

$$I(1/a,a) = -I(a,1/a)$$

On en déduit

$$I(1/a,a) = 0$$

b) En procédant aux changements de variable proposés

$$I(a,b) = \int_{a+1/a}^{b+1/b} \frac{-\,\mathrm{d}v}{v\sqrt{v^2-2}} = \int_{a/(a^2+1)}^{b/(b^2+1)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-2t^2}}$$

et donc

$$I(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arcsin\sqrt{2}t\right]_{a/(a^2+1)}^{b/(b^2+1)}$$

c) Le changement de variable $v = x + 1/x$ n'est pas bijectif quand x parcourt $]0,+\infty[$ mais dans les calculs précédents, il était possible de l'exploiter sans exprimer x en fonction de v. L'hypothèse $a, b > 1$ n'a donc pas été utilisée dans l'étude qui précède et donc le résultat proposé se généralise immédiatement.

Exercice 37 : [énoncé]
a) Via $x = \cos t$

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{3+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

b) Via $x = \sqrt{t}$

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+2x} = \left[\ln(1+2x)\right]_1^{\sqrt{2}} = \ln(1+2\sqrt{2}) - \ln 3$$

c) Via $x = 1/t$

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{1/2} \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \int_{3/2}^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{7}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}$$

Exercice 38 : [énoncé]
On réalise le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ pour lequel $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.
On obtient

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi/3} \frac{1}{2}\arcsin(\sin x)\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$$

On simplifie

$$\arcsin(\sin x) = x \text{ pour } x \in [0, \pi/2]$$

et

$$\arcsin(\sin x) = \pi - x \text{ pour } x \in [\pi/2, 2\pi/3]$$

Enfin on calcule

$$\int_0^{\pi/2} x\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$$

par intégration par parties sachant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2\tan\frac{x}{2}\right) = 1+\tan^2\frac{x}{2}$$

ce qui donne

$$\int_0^{\pi/2} x\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \left[2x\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

puis

$$\int_0^{\pi/2} x\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \pi + \left[4\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]_0^{\pi/2} = \pi - 2\ln 2$$

et de même

$$\int_{\pi/2}^{2\pi/3} (\pi - x)\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + 2\ln 2 - \pi$$

Au final, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Exercice 39 : [énoncé]
On introduit F primitive de f sur $\mathbb{R}$.
a) $g(x) = F(x^2) - F(2x)$ est $\mathcal{C}^1$ par opérations et $g'(x) = 2xf(x^2) - 2f(2x)$.
b) $g(x) = x(F(x) - F(0))$ est $\mathcal{C}^1$ par opérations et $g'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x)$.
c) $g(x) \underset{u=t+x}{=} \int_x^{2x} f(u)\,\mathrm{d}u = F(2x) - F(x)$ est $\mathcal{C}^1$ par opérations et
$g'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

Exercice 40 : [énoncé]
a) φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ existe.

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, -x \in \mathbb{R}^\star \text{ et } f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\mathrm{sh}t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{u=-t}{=} -\int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}u}{u}\,\mathrm{d}u = -f(x)$$

Ainsi f est impaire.
b) φ est continue donc possède une primitive F. Comme $f(x) = F(2x) - F(x)$ f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{\mathrm{sh}2x - \mathrm{sh}x}{x}$$

pour $x \in \mathbb{R}^\star$ et $f'(0) = 1$.
c) Pour tout $x \geqslant 0$, on a $\mathrm{sh}2x \geqslant \mathrm{sh}x$ donc $f'(x) \geqslant 0$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Puisque

$$f(x) \geqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}x}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{sh}x\ln 2$$

on a $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
On complète le tableau de variation par parité.

Exercice 41 : [énoncé]
a) En découpant l'intégrale en deux

$$F(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que F est dérivable et

$$F'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Finalement F est de classe $\mathcal{C}^2$ et $F''(x) = -f(x)$
b) $F'(1) = 0$ donc

$$F'(u) = -\int_1^u f(t)\,\mathrm{d}t = \int_u^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $F(0) = 0$, on a

$$F(x) = \int_0^x F'(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x \int_u^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

Exercice 42 : [énoncé]

a) En développant

$$f(x)=\int_0^x(\sin x\cos t-\cos x\sin t)g(t)\,\mathrm{d}t=\sin x\int_0^x\cos tg(t)\,\mathrm{d}t-\cos x\int_0^x\sin tg(t)\,\mathrm{d}t$$

f est donc dérivable et

$$f'(x)=\cos x\int_0^x\cos tg(t)\,\mathrm{d}t+\sin x\int_0^x\sin tg(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\cos(t-x)g(t)\,\mathrm{d}t$$

b) f' est dérivable et

$$f''(x)=-\sin x\int_0^x\cos tg(t)\,\mathrm{d}t+\cos x\int_0^x\sin tg(t)\,\mathrm{d}t+g(x)=-\int_0^x\sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t+g(x)$$

donc $f''(x)+f(x)=g(x)$.

c) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Solution homogène $y(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x$.

Solution particulière $y(x)=f(x)$.

Solution générale

$$y(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x+\int_0^x\sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 43 : [énoncé]

a) Soit $\tilde f$ une primitive de f.

$$F(x)=\frac{\tilde f(x)-\tilde f(-x)}{2x}=\frac{\tilde f(x)-\tilde f(0)}{2x}+\frac{\tilde f(0)-\tilde f(-x)}{2x}\xrightarrow[x\to0]{}\tilde f'(0)=f(0)$$

On prolonge F par continuité en 0 en posant $F(0)=f(0)$.

b) F est dérivable par opérations et

$$F'(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2x}-\frac{1}{2x^2}\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties

$$\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t=[tf(t)]_{-x}^x-\int_{-x}^x tf'(t)\,\mathrm{d}t$$

et on peut donc simplifier

$$F'(x)=\frac{1}{2x^2}\int_{-x}^x tf'(t)\,\mathrm{d}t$$

c) Sachant

$$\int_{-x}^x tf'(0)\,\mathrm{d}t=0$$

on peut écrire

$$F'(x)=\frac{1}{2x^2}\int_{-x}^x t\left(f'(t)-f'(0)\right)\,\mathrm{d}t$$

En posant

$$M_x=\sup_{t\in[-x,x]}|f'(t)-f'(0)|$$

on a alors

$$|F'(x)|\leqslant\frac{1}{2x^2}\int_{-x}^x tM_x\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}M_x$$

Or f' est continue en 0, donc $M_x\xrightarrow[x\to0]{}0$ puis

$$F'(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$$

En vertu du théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, on peut affirmer que F est dérivable en 0 et $F'(0)=0$.

Exercice 44 : [énoncé]

Puisque continue, la fonction f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,f(x)-f(y)=F(2y+x)-F(2x+y)$$

Pour $y\in\mathbb{R}$ fixé, on obtient

$$f:x\mapsto f(y)+F(2y+x)-F(2x+y)$$

Puisque la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x)=f(2y+x)-2f(2x+y)$$

En dérivant cette relation en la variable y, on obtient

$$0=2f'(2y+x)-2f'(2x+y)$$

et donc

$$f'(2y+x)=f'(2x+y)$$

Puisque pour tout $(s,t)\in\mathbb{R}^2$, il existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases}2x+y=s\\x+2y=t\end{cases}$$

on peut affirmer que la fonction f' est constante.
On en déduit que la fonction f est affine.
Par le calcul, on vérifie que, parmi les fonctions affines, seule la fonction nulle vérifie la relation proposée.

Exercice 45 : [énoncé]
a) Soit $x \in]0,1[$, $\left[x,x^2\right] \subset]0,1[$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur $]0,1[$ donc $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ existe.
Pour $t \in \left[x^2,x\right]$,

$$\frac{1}{\ln x} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln x^2}$$

donc

$$\frac{x^2-x}{\ln x^2} \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{x^2-x}{\ln x}$$

Quand $x \to 0^+$, $\varphi(x) \to 0$.
On a aussi

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

donc

$$\int_x^{x^2} \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \varphi(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

or

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln(\ln t)]_x^{x^2} = \ln 2$$

Quand $x \to 1^-$, $\varphi(x) \to \ln 2$.
Finalement φ peut être prolongée par continuité en 0 et en 1.
b) Soit F une primitive de $\frac{1}{\ln t}$ sur $]0,1[$.
On a $\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$ ce qui permet de dériver φ et d'obtenir

$$\varphi'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ est définie car on vérifie aisément que la fonction intégrée peut être prolongée par continuité en 0 et en 1 et on a

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = [\varphi(x)]_0^1 = \ln 2$$

Exercice 46 : [énoncé]
a) La fonction f est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ car pour chaque x dans ce domaine, la fonction $t \mapsto 1/\ln t$ est définie et continue sur le segment d'extrémités x et x^2 car 1 n'y appartient pas. Pour $x \in]0,1[$, on a pour tout $t \in \left[x^2,x\right]$, $2\ln x \leqslant \ln t \leqslant \ln x$ puis par encadrement d'intégrales

$$\frac{x^2-x}{2\ln x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2-x}{\ln x}$$

et donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.
L'encadrement est identique pour $x > 1$ ce qui permet d'affirmer $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
On peut aussi écrire

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

et par encadrement du t du numérateur par x et x^2, on obtient $f(x)$ encadré par $xI(x)$ et $x^2I(x)$ avec

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln|\ln t|]_x^{x^2} = \ln 2$$

d'où $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln 2$.
b) On introduit H primitive de $t \mapsto 1/\ln t$ et on démontre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ avec $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. Cette dérivée étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on conclut que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$ et puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec $f'(1) = 1$. Par développement en série entière $h \mapsto \frac{\ln(1+h)}{h}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 donc $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1 et par passage à l'inverse $x \mapsto f'(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1. Finalement f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Le calcul de $f''(x)$ permet de justifier que f'' n'a pas de limite finie en 0 et donc f ne peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
c) f est croissante, convexe, branche parabolique verticale en $+\infty$, tangente horizontale en l'origine.

Exercice 47 : [énoncé]
a) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$, elle y admet donc une primitive F.
Pour $x > 0$, on a $[x,2x] \subset]0,+\infty[$, donc l'intégrale définissant $f(x)$ existe et

$$f(x) = F(2x) - F(x)$$

Puisque la fonction F est dérivable, la fonction f l'est aussi et

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)}{x}$$

L'étude pour $x < 0$ est similaire en considérant $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$ définie et continue sur $]-\infty, 0[\supset [2x, x]$.
b) Pour $x > 0$,

$$\forall t \in [x, 2x]\,, \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{2x}$$

donc

$$\mathrm{e}^x \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{2x} \ln 2$$

puis

$$f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \ln 2$$

L'étude est analogue en 0^-

Exercice 48 : [énoncé]
a) Par le changement de variable $u = -t$, on obtient que f est paire.
b) Pour tout $x > 0$, on a

$$\forall t \in [x, 2x]\,, \frac{\operatorname{ch} x}{t} \leqslant \frac{\operatorname{ch} t}{t} \leqslant \frac{\operatorname{ch} 2x}{t}$$

En intégrant, on obtient

$$\operatorname{ch} x . \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant \operatorname{ch} 2x . \ln 2$$

et on en déduit

$$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \ln 2$$

c) La fonction $t \mapsto \mathrm{ch} t/t$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc y admet une primitive G et puisque $f(x) = G(2x) - G(x)$, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{\mathrm{ch}2x - \mathrm{ch}x}{x}$$

De plus

$$f'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

donc, par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$,f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
d) Puisque $f(x) \geqslant \operatorname{ch} x . \ln 2$, f présente une branche parabolique verticale.

Exercice 49 : [énoncé]
a) On a

$$g(x) - f(0) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) - f(0) \,\mathrm{d}t$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$|x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$$

Par suite, si $|x| \leqslant \alpha$, pour tout t compris entre 0 et x, $|f(t) - f(0)| \leqslant \varepsilon$ puis par intégration, $|g(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} f(0)$. On pose $g(0) = f(0)$.
b) Par opération, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$.

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t + \frac{f(x)}{x}$$

Procédons à une intégration par parties,

$$\int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t = x f(x) - \int_0^x t f'(t) \,\mathrm{d}t$$

On a alors

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t f'(t) \,\mathrm{d}t$$

De façon semblable à ce qui précède, on obtient

$$g'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2} f'(0)$$

Ainsi la fonction continue g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(0) = \frac{1}{2} f'(0)$$

Exercice 50 : [énoncé]
Posons

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$$

On a

$$F(x) = \int_0^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$$

ce qui assure que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Le changement de variable $t = -u$ assure que F est impaire.

Par dérivation de primitive

$$F'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+(2x)^2+(2x)^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$$

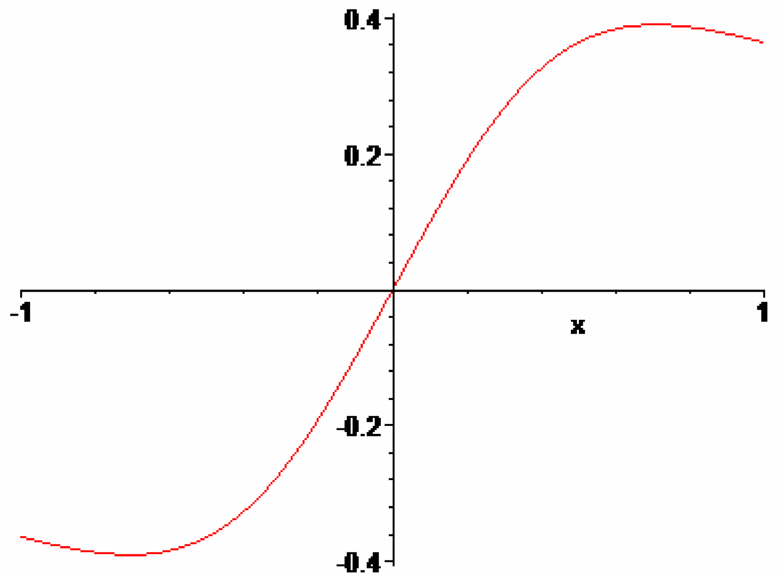
En réduisant au même dénominateur et en multipliant par la quantité conjuguée, $F'(x)$ est du signe de

$$4(1+x^2+x^4) - \left(1+(2x)^2+(2x)^4\right) = 3(1-4x^4)$$

F est donc croissante que $\left[0, 1/\sqrt{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[1/\sqrt{2}, +\infty\right[$
En 0, le graphe de la fonction passe par l'origine avec une tangente d'équation $y = x$.
Quand $x \to +\infty$,

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2+x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+x^4}} \to 0$$

et donc F tend vers 0 en $+\infty$.



Exercice 51 : [énoncé]
a)

$$f : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{t}{\sqrt{(t-1)(t^2+t+1)}}$$

est définie et continue sur $]1, x]$ et

$$f(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{t-1}}$$

donc $F(x)$ existe.
F est primitive de la fonction continue f sur $]1, +\infty[$ donc F est $\mathcal{C}^1$ et $F'(x) = f(x)$.
Comme f est $\mathcal{C}^\infty$, F est finalement $\mathcal{C}^\infty$ et sur $]1, +\infty[$

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}$$

b) F est continue en 1 et $F'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$. Tangente verticale en 1.
c) $\sqrt{t^3-1} \leqslant t^{3/2}$ donc

$$F(x) \geqslant \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc $F(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.
d) F est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc F réalise une bijective de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
F réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ avec $F'(x) \neq 0$ donc F^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

$$(F^{-1})' = \frac{1}{F' \circ F^{-1}} = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3 - 1}}{F^{-1}}$$

donc F^{-1} est solution de l'équation différentielle considérée.
e) F^{-1} est continue en 0 et $F^{-1}(0) = 1$. En vertu de la relation

$$(F^{-1})' = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3 - 1}}{F^{-1}}$$

on obtient

$$(F^{-1})'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

F^{-1} est donc dérivable en 0 et $(F^{-1})'(0) = 0$.

Exercice 52 : [énoncé]
a)

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{1+(k/n)^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2$$

c)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2k/n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x}}=\left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1=\sqrt{3}-1$$

Exercice 53 : [énoncé]
On peut écrire

$$S_n=n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$$

et

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f:t\mapsto\sqrt{t}$ définie et continue sur $[0,1]$.
Par somme de Riemann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

donc

$$S_n\sim\frac{2}{3}n^{3/2}$$

Exercice 54 : [énoncé]
On a

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^nn!}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln(n+k)-\ln n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

La fonction $x\to\ln(1+x)$ étant continue sur $[0,1]$, on obtient

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^nn!}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1$$

On en déduit

$$\left(\frac{(2n)!}{n^nn!}\right)^{\frac{1}{n}}\to\frac{4}{\mathrm{e}}$$

Exercice 55 : [énoncé]

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1\ln(1+t)\mathrm{d}t=2\ln 2-1$$

donc

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}\to\frac{4}{\mathrm{e}}$$

Pour $k\in\{1,\dots,n\}$, $\frac{k}{n^2}\leqslant\frac{1}{n}$ donc

$$1\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}\leqslant1+\frac{1}{n}$$

puis

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}\to1$$

Exercice 56 : [énoncé]
Pour $x\geqslant0$, $x-\frac{1}{6}x^3\leqslant\sin x\leqslant x$ donc $|\sin x-x|\leqslant Mx^3$ avec $M=1/6$.
On a alors

$$\left|\sin\frac{k}{n^2}-\frac{k}{n^2}\right|\leqslant M.\frac{k^3}{n^6}\leqslant\frac{M}{n^3}$$

donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}\right|\leqslant\frac{M}{n^2}\to0$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}\to\int_0^1 t\sin t\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\to\sin1-\cos1$$

Pour $x\geqslant0$, $x-\frac{1}{6}x^3\leqslant\sin x\leqslant x$ donne aussi $\left|\sin^2x-x^2\right|\leqslant M'x^4$ avec $M'=1/3$.
Ainsi

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{1}{\sqrt{k+n}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}\right|\leqslant M'\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+n)^2}\leqslant\frac{M'}{n}\to0$$

Or
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\to\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2$$
donc
$$\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{1}{\sqrt{k+n}}\to\ln 2$$

Exercice 57 : [énoncé]
On a
$$f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\cos\frac{(n+1)x}{2}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$
donc
$$x_n=\frac{\pi}{n+1}$$
Par suite
$$f_n(x_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n+1}}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n+1}}{\frac{k}{n+1}}$$
Or la fonction $t\mapsto\sin(\pi t)/t$ peut être prolongée en une fonction continue sur $[0,1]$ donc par somme de Riemann
$$f_n(x_n)\to\int_0^1\frac{\sin(\pi t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 58 : [énoncé]
On peut écrire
$$u_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+2k/n)^3}=\frac{1}{n^2}S_n$$
avec
$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+2k/n)^3}$$
Par les sommes de Riemann, on a
$$S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)^3}=\left[-\frac{1}{4(1+2t)^2}\right]_0^1=\frac{2}{9}$$
On en déduit
$$u_n\sim\frac{2}{9n^2}$$

Exercice 59 : [énoncé]
La division euclidienne de n par k s'écrit
$$n=[n/k]\,k+r(k)$$
et donc
$$n-r(k)=k\,[n/k]$$
puis
$$v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]$$
ce qui fait penser à une somme de Riemann associée à la fonction $f:t\mapsto t\,[1/t]$ définie et continue par morceaux sur $]0,1]$. Bien qu'elle soit prolongeable par continuité en 0, ce prolongement n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ (il n'existe pas de subdivision finie du segment $[0,1]$ qui soit adaptée) et l'on ne peut donc pas employer directement le théorème du cours relatif aux sommes de Riemann : cela va nous obliger à un petit découpage...
Soit $N\in\mathbb{N}^\star$. On peut écrire
$$v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n/N]}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]+\frac{1}{n}\sum_{k=[n/N]+1}^{n}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]$$
D'une part
$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n/N]}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n/N]}1\leqslant\frac{[n/N]}{n}\leqslant\frac{1}{N}$$
et d'autre part, par les sommes de Riemann
$$\frac{1}{n-[n/N]}\sum_{k=[n/N]+1}^{n}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{1/N}^{1}t\,[1/t]\,\mathrm{d}t$$
Par le changement de variable $u=1/t$
$$\int_{1/N}^{1}t\,[1/t]\,\mathrm{d}t=\int_1^N\frac{[u]}{u^3}\,\mathrm{d}u=\sum_{k=1}^{N}\int_k^{k+1}\frac{k}{u^3}\,\mathrm{d}u$$
puis
$$\int_{1/N}^{1}t\,[1/t]\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k^2}$$

et l'on remarque que

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k^2}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{\pi^2}{12}$$

En choisissant N assez grand pour que $1/N\leqslant\varepsilon$ et $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=N+2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant\varepsilon$, on a

$$\left|v_n-\frac{\pi^2}{12}\right|\leqslant\varepsilon+\frac{n-[n/N]}{n}\left(\frac{1}{n-[n/N]}\sum_{k=[n/N+1]}^{N}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\frac{\pi^2}{12}\right)+\frac{[n/N]}{n}\frac{\pi^2}{12}$$

Puis pour n assez grand

$$\left|v_n-\frac{\pi^2}{12}\right|\leqslant\varepsilon+\frac{n-[n/N]}{n}\left(\sum_{k=N+2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\varepsilon\right)+\frac{[n/N]}{n}\frac{\pi^2}{12}$$

ce qui donne

$$\left|v_n-\frac{\pi^2}{12}\right|\leqslant\varepsilon+2\varepsilon+\varepsilon\frac{\pi^2}{12}$$

Finalement $v_n\to\pi^2/12$ puis $u_n\to1-\pi^2/12$

Exercice 60 : [énoncé]

a) Par somme de Riemann

$$\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\to\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln 2$$

b) Par somme de Riemann

$$\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p^\alpha}=n^{1-\alpha}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^\alpha}\to0\times\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^\alpha}=0$$

c) Sachant pour $x>0$

$$x-\frac{x^3}{6}\leqslant\sin x\leqslant x$$

on obtient

$$\left|\sum_{p=n+1}^{2n}\sin\left(\frac{1}{p}\right)-\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}\right|\leqslant\frac{1}{6}\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p^3}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{2n}\sin\left(\frac{1}{p}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}=\ln 2$$

Exercice 61 : [énoncé]

a) Les deux polynômes de l'égalité sont unitaires, de degré $2n$ et ont pour racines les racines $2n$-ième de l'unité car les racines du polynôme $X^2-2X\cos(k\pi/n)+1$ sont les $\mathrm{e}^{\pm ik\pi/2n}$.

b) Par les sommes de Riemann,

$$\int_0^\pi\ln(a^2-2a\cos t+1)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(a^2-2a\cos\frac{k\pi}{n}+1)$$

Or

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(a^2-2a\cos\frac{k\pi}{n}+1)=\frac{\pi}{n}\ln\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}$$

Si $|a|<1$ alors $\frac{\pi}{n}\ln\frac{1-a^{2n}}{1-a^2}\to0$ et donc

$$\int_0^\pi\ln(a^2-2a\cos t+1)\,\mathrm{d}t=0$$

Si $|a|>1$ alors $\frac{\pi}{n}\ln\frac{1-a^{2n}}{1-a^2}\to2\pi\ln|a|$ et donc

$$\int_0^\pi\ln(a^2-2a\cos t+1)\,\mathrm{d}t=2\pi\ln|a|$$

Exercice 62 : [énoncé]

C'est du cours.

Exercice 63 : [énoncé]

Par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\int_0^x\frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

or

$$0\leqslant\int_0^x\frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{x^5}{120}$$

donc

$$x-\frac{1}{6}x^3\leqslant\sin x\leqslant x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$$

Exercice 64 : [énoncé]
Soit $x \in I$
Cas $x = a$
N'importe quel c convient.
Cas $x > a$
Par la formule de Taylor-Laplace

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Posons

$$m = \min_{[a,x]} f^{(n+1)} \text{ et } M = \max_{[a,x]} f^{(n+1)}$$

On a

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à $f^{(n+1)}$, il existe $c \in I$ tel que

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cas $x < a$
Semblable

Exercice 65 : [énoncé]
En appliquant la formule de Taylor reste intégrale à la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ entre 0 et x on obtient :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right|$$

Si $x \geqslant 0$ alors

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!} = \frac{|x|^{n+1}\,\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}$$

Si $x \leqslant 0$ alors

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| = \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{|x|^{n+1}\,\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}$$

On aurait aussi pu appliquer directement l'inégalité de Taylor-Lagrange à la restriction de f sur $[-|x|\,,|x|]$.
Quand $n \to +\infty$,

$$\frac{|x|^{n+1}\,\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!} \to 0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$$

Exercice 66 : [énoncé]
La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ avec

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

$f(0) = 0$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pour $k > 0$ et $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant n! = M$ sur $\mathbb{R}^+$.
Par l'inégalité de Taylor Lagrange :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pour $x = 1$, on obtient :

$$\left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$$

Exercice 67 : [énoncé]
Considérons la fonction $f : t \to \ln(1+t)$.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(0) = 0$,

$$\forall k \geqslant 1, f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}$$

donc

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

Sur $[0,1]$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant n!$ donc l'inégalité de Taylor Lagrange donne

$$\left|f(1)-f(0)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \leqslant \frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$$

i.e.

$$\left|\ln 2-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\to 0$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\to \ln 2$$

Exercice 68 : [énoncé]
Si f est solution alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ et par la formule de Taylor reste-intégrale :

$$\forall x\in[0,1]\,,\ f(x)=f(0)+xf'(0)+\int_0^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t=xf'(0)+\int_0^x (x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $f(1)=0$ donc $f'(0)=\int_0^1 (t-1)g(t)\,\mathrm{d}t$ puis

$$f(x)=x\int_0^1 (t-1)g(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x (x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Inversement, considérons f définie par :

$$f(x)=x\int_0^1 (t-1)g(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x (x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On a $f(0)=f(1)=0$. De plus

$$f(x)=x\int_0^1 (t-1)g(t)\,\mathrm{d}t+x\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t$$

donc f est dérivable et

$$f'(x)=\int_0^1 (t-1)g(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t+xg(x)-xg(x)$$

f est donc deux fois dérivable et

$$f''(x)=g(x)$$

Exercice 69 : [énoncé]
En vertu du théorème de Taylor-Young :

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2}h^2f''(a)+o(h^2)$$

donc

$$f(a+h)-2f(a)+f(a-h)=h^2f''(a)+o(h^2)$$

puis

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a)$$

Exercice 70 : [énoncé]
Par Taylor avec reste intégral

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\int_x^{x+1}(x+1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$|f'(x)|\leqslant|f(x)|+|f(x+1)|+\max_{x\leqslant t\leqslant x+1}|f''(t)|\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Exercice 71 : [énoncé]
Par l'inégalité de Taylor Lagrange avec $M=\max\limits_{[0,1]}|f''|$:

$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f(0)-\frac{k}{n^2}f'(0)\right|\leqslant\frac{M}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$

Par suite

$$\left|S_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f'(0)\right|\leqslant\frac{M}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2\leqslant\frac{M}{2n}\to 0$$

or

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f'(0)=\frac{n+1}{2n}f'(0)$$

donc

$$S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}f'(0)/2$$

Exercice 72 : [énoncé]
a) L'existence de θ est assurée par le théorème des accroissements finis.
b) Si deux réels θ et θ' sont solutions distinctes alors, par le théorème de Rolle, f'' s'annule entre θx et $\theta' x$. Or $f''(0) \neq 0$, donc il existe un voisinage de 0 sur lequel f'' ne s'annule pas et sur ce voisinage on a l'unicité de θ.
c) Par la formule de Taylor-Young appliquée à f' :

$$f'(\theta x) = f'(0) + x\theta f''(0) + o(x)$$

En substituant dans la relation initiale, on obtient

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2\theta f''(0) + o(x^2)$$

Or la formule de Taylor-Young appliquée à f donne

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + o(x^2)$$

On en déduit

$$x^2\theta f''(0) + o(x^2) = \frac{1}{2}x^2 f''(0) + o(x^2)$$

Sachant $f''(0) \neq 0$, on en déduit $\theta \to 1/2$ quand $x \to 0$.

Exercice 73 : [énoncé]
Par l'égalité de Taylor-Lagrange (hors-programme) :

$$\forall x \in \left]0, \pi/2\right[, \exists \xi \in \left]0, x\right[, \ \sin x = x - \frac{1}{6}x^3\cos(\xi)$$

Le réel $\theta_x = \xi/x$ convient alors
A défaut de connaître l'égalité de Taylor-Lagrange, par l'égalité de Taylor avec reste-intégrale

$$\sin x = x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\cos t \,\mathrm{d}t$$

Or pour $t \in [0, x]$, on a

$$\cos x \leqslant \cos t \leqslant 1$$

avec inégalité stricte pour $t \in \left]0, x\right[$ donc

$$\frac{x^3}{6}\cos x < \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\cos t \,\mathrm{d}t < \frac{x^3}{6}$$

Ainsi

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\cos t \,\mathrm{d}t = \lambda\frac{x^3}{6} \text{ avec } \cos x < \lambda < 1 = \cos 0$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut écrire

$$\lambda = \cos(x\theta_x) \text{ avec } \theta_x \in \left]0, 1\right[$$

Quand $x \to 0$, $x\theta_x \to 0$ donc

$$\cos(x\theta_x) = 1 - \frac{1}{2}x^2\theta_x^2 + o(x^2)$$

puis

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^5\theta_x^2 + o(x^5)$$

or

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$$

donc $\theta_x^2 \to 1/10$ puis

$$\theta_x \to \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Exercice 74 : [énoncé]
a) Par la formule de Taylor Young :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(0) + o(x^n)$$

$\varphi(x) = o(x^n)$ entraîne alors $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(n)}(0) = 0$.
En appliquant la formule de Taylor Young à $\varphi^{(p)}$, on obtient la conclusion.
b) $x\psi(x) = \varphi(x) = o(x^n)$ donc $\psi(x) = o(x^{n-1})$.
$x\psi'(x) + \psi(x) = \varphi'(x) = o(x^{n-1})$ donc $\psi'(x) = o(x^{n-2})$
$x\psi''(x) + 2\psi'(x) = \varphi''(x) = o(x^{n-2})$ donc $\psi''(x) = o(x^{n-3})$...
Par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.
c) On introduit

$$\varphi(x) = f(x) - \left(f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)\right)$$

On a $\varphi(x) = o(x^n)$ donc ψ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ puis

$$g(x) = \psi(x) + \left(f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!}f^{(n)}(0)\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.
d)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{x}\frac{1}{g(x)/x}$$

avec $x \mapsto f(x)/x$ et $x \mapsto g(x)/x$ qui se prolongent en 0 en des fonctions de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

Exercice 75 : [énoncé]
Supposons
$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f \geqslant \frac{1}{b-c}\int_c^b f$$
On a alors
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \leqslant \int_a^c f + \frac{b-c}{c-a}\int_a^c f = \frac{b-a}{c-a}\int_a^c f$$
Le cas
$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f < \frac{1}{b-c}\int_c^b f$$
est semblable et on peut conclure.

Exercice 76 : [énoncé]
($\Leftarrow$) ok
($\Rightarrow$) Si $\int_a^b f \geqslant 0$ alors $\int_a^b f = \int_a^b |f|$ donne $\int_a^b |f(t)| - f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Or la fonction $|f| - f$ est continue et positive donc elle est nulle.
Le cas $\int_a^b f < 0$ est semblable.

Exercice 77 : [énoncé]
Montrons que l'égalité proposée a lieu si, et seulement si, la fonction f est de signe constant
Si f est positive alors $|f| = f$ et donc l'égalité a lieu.
Si f est négative alors $|f| = -f$ et à nouveau l'égalité a lieu.
Inversement, supposons
$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$$
Si $\int_a^b f \geqslant 0$ alors on obtient
$$\int_a^b f = \int_a^b |f|$$
et donc
$$\int_a^b |f(x)| - f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
La fonction $|f| - f$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est donc la fonction nulle. Par suite $f = |f|$ et donc f est positive.
Si $\int_a^b f \leqslant 0$, l'étude en analogue en observant
$$\int_a^b |f(x)| + f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Exercice 78 : [énoncé]
Supposons $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$.
On peut écrire $\int_a^b f = r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r = \left|\int_a^b f\right|$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Considérons alors $g : t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-i\theta}$.
On a $\int_a^b g = \left|\int_a^b f\right| \in \mathbb{R}$ donc $\int_a^b g = \int_a^b \mathrm{Re}(g)$.
Or $|g| = |f|$ et l'hypothèse de départ donne $\int_a^b |g| = \int_a^b \mathrm{Re}(g)$ puis $\int_a^b |g| - \mathrm{Re}(g) = 0$.
Puisque la fonction réelle $|g| - \mathrm{Re}(g)$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est la fonction nulle.
Par suite $\mathrm{Re}(g) = |g|$ et donc la fonction g est réelle positive.
Finalement, la fonction f est de la forme $t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{i\theta}$ avec g fonction réelle positive.
La réciproque est immédiate.

Exercice 79 : [énoncé]
La fonction $\varphi : t \mapsto f(t) - t$ est définie, continue sur $[0,1]$ et
$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} = 0$$
donc φ s'annule.

Exercice 80 : [énoncé]
Posons
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
La fonction $\varphi : t \mapsto f(t) - \mu$ est définie, continue sur $[a,b]$ et
$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mu(b-a) = 0$$
donc φ s'annule.

Exercice 81 : [énoncé]
Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $g = 0$ (car on sait g continue et positive) et le problème est immédiatement résolu.
Sinon, puisque f est continue sur le segment $[a,b]$, elle admet un minimum et maximum en des points c et d.
Posons $m = f(c)$ et $M = f(d)$.
Par positivité de la fonction g, on a

$$mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t)$$

donc

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant M$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre c et d pour conclure.

Exercice 82 : [énoncé]
a) En exploitant la relation de Chasles, on peut écrire

$$S_n - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(f(a_k) - f(t)\right) g(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur le segment $[a,b]$, elle y est uniformément continue et donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall s,t \in [a,n]\,, |s-t| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leqslant \varepsilon$$

Pour n assez grand, on a $|(b-a)/n| \leqslant \alpha$ et alors pour tout $t \in [a_k, a_{k+1}]$ on a $|a_k - t| \leqslant \alpha$ donc $|f(a_k) - f(t)| \leqslant \varepsilon$. On en déduit

$$\left|S_n - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \varepsilon\,|g(t)|\,\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon M(b-a) \text{ avec } M = \sup_{[a,b]}|g|$$

Par suite

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

b) En exprimant l'intégrale à l'aide de la primitive G

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(G(a_{k+1}) - G(a_k)\right)$$

En séparant la somme en deux, puis en procédant à un décalage d'indice sur la première

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(a_{k-1})G(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)G(a_k)$$

puis en recombinant les deux sommes

$$S_n = f(a_{n-1})G(a_n) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(f(a_{k-1}) - f(a_k)\right)G(a_k) - f(a_0)G(a_0)$$

Or $G(a_0) = G(a) = 0$ et puisque la fonction f est décroissante et positive

$$S_n \leqslant f(a_{n-1})M + \sum_{k=1}^{n-1}\left(f(a_{k-1}) - f(a_k)\right)M \text{ avec } M = \max_{[a,b]} G$$

Enfin par télescopage

$$S_n \leqslant f(a_0)M = f(a)M$$

De façon symétrique, on a aussi

$$S_n \geqslant f(a)m \text{ avec } m = \min_{[a,b]} G$$

c) En passant à la limite ce qui précède, on obtient

$$f(a)m \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(a)M$$

Si $f(a) = 0$, le problème est immédiatement résolu, sinon, ce qui précède affirme que

$$\frac{1}{f(a)}\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

est valeur intermédiaire à deux valeurs prises par G et le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.
d) Quitte à considérer $-f$, ce qui ne change rien au problème posé, on peut supposer que la fonction f est croissante. En appliquant le résultat précédent à la fonction $t \mapsto f(b) - f(t)$ décroissante et positive, on peut affirmer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b (f(b) - f(t))g(t)\,\mathrm{d}t = (f(b) - f(a))\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$

et il suffit de réorganiser les membres de cette identité pour former celle voulue.

Exercice 83 : [énoncé]
a) La fonction G est continue donc l'image d'un segment est un segment.
b) Il suffit de procéder à une intégration par parties.
c) Puisque la fonction $-f'$ est positive, on a

$$m\left(f(a)-f(b)\right)\leqslant-\int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t\leqslant M\left(f(a)-f(b)\right)$$

et donc

$$mf(a)+\left[G(b)-m\right]f(b)\leqslant\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\leqslant Mf(a)+\left[G(b)-M\right]f(b)$$

puis

$$mf(a)\leqslant\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\leqslant Mf(a)$$

Ainsi, que $f(a)$ soit nul ou non, il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=f(a)G(c)$$

Exercice 84 : [énoncé]
a) $\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=0$ et $t\mapsto f(t)\sin t$ est continue donc il existe $a\in\,]0,\pi[$ tel que $f(a)\sin a=0$ i.e. $f(a)=0$.
b) Par l'absurde si f ne s'annule qu'une seule fois alors le tableau de signe de f est de l'une des quatre formes suivantes

t	0		a		π
$f(t)$	0	$+$	0	$+$	0

,

t	0		a		π
$f(t)$	0	$-$	0	$-$	0

t	0		a		π
$f(t)$	0	$+$	0	$-$	0

ou

t	0		a		π
$f(t)$	0	$-$	0	$+$	0

Les deux premiers cas sont à exclure car

$$\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

est l'intégrale nulle d'une fonction non nulle de signe constant.
Les deux autres cas sont à exclure car

$$\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\,\mathrm{d}t=\cos a\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t-\sin a\int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t$$

est l'intégrale nulle d'une fonction non nulle de signe constant.
Absurde.

Exercice 85 : [énoncé]
Notons que l'hypothèse initiale donne par linéarité que pour toute fonction polynomiale P de degré $\leqslant n$

$$\int_a^b P(t)f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

Par l'absurde supposons que la fonction f ne s'annule pas plus de n fois et notons $x_1<\ldots<x_p$ (avec $p\leqslant n$) les points où f s'annule tout en changeant de signe.
On peut dresser le tableau de signe de la fonction continue f et affirmer que la fonction

$$x\mapsto(x-x_1)\ldots(x-x_p)f(x)$$

est de signe constant. Or cette fonction est continue et d'intégrale nulle, c'est donc la fonction nulle. Il en découle que la fonction f est nulle sur $[a,b]\setminus\{x_1,\ldots,x_p\}$ puis nulle sur $[a,b]$ par argument de continuité.

Exercice 86 : [énoncé]
Posons $g(x)=\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.

$$g(x)-g(y)=\int_a^b f(t)\left(\sin(xt)-\sin(yt)\right)\,\mathrm{d}t$$

Puisque la fonction sinus est lipschitzienne

$$\left|\sin(xt)-\sin(yt)\right|\leqslant|x-y|\,|t|$$

donc

$$|g(x)-g(y)|\leqslant|x-y|\int_a^b|tf(t)|\,\mathrm{d}t$$

Ainsi g est lipschitzienne.

Exercice 87 : [énoncé]
La fonction $t\mapsto(M-f(t))(f(t)-m)$ est positive donc

$$\int_0^1(M-f(t))(f(t)-m)\,\mathrm{d}t\geqslant0$$

En développant et par linéarité, on obtient $-mM-\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\geqslant0$ sachant $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$.
On en déduit l'inégalité demandée.

Exercice 88 : [énoncé]
Nous allons établir l'inégalité

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\times\left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On peut commencer par observer que si cette inégalité est vraie pour f et g, elle l'est encore pour $f+\lambda$ et $g+\mu$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. On peut donc, sans perte de généralités, supposer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t=0$ et il s'agit alors d'établir $\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$.
Il existe alors $a\in[0,1]$ tel que $f(x)\leqslant 0$ pour $x\in[0,a]$ et $f(x)\geqslant 0$ pour $x\in[a,1]$.
Il existe aussi $b\in[0,1]$ tel que $g(x)\leqslant 0$ pour $x\in[0,b]$ et $g(x)\geqslant 0$ pour $x\in[b,1]$.
Quitte à échanger f et g, on peut supposer $a\leqslant b$.

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)g(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$\int_0^a f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$ car $f(t),g(t)\leqslant 0$ sur $[0,a]$.
$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\geqslant f(b)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ car $f(t)\leqslant f(b)$ et donc $f(t)g(t)\geqslant f(b)g(t)$ puisque $g(t)\leqslant 0$.
$\int_b^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\geqslant f(b)\int_b^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ car $f(t)\geqslant f(b)$ et donc $f(t)g(t)\geqslant f(b)g(t)$ puisque $g(t)\geqslant 0$.
On en déduit

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\geqslant f(b)\int_a^1 g(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$$

et on peut conclure.
Notons que la comparaison

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\times\left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

ne peut être améliorée car c'est une égalité quand f et g sont des fonctions constantes.

Exercice 89 : [énoncé]
a) Quand $x\to 0^+$,

$$\left|\int_{-x}^x \sin t^2\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{-x}^x\left|\sin t^2\right|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{-x}^x 1.\mathrm{d}t=2x\to 0$$

donc $\int_{-x}^x \sin t^2\,\mathrm{d}t\to 0$.

b) Quand $x\to+\infty$,

$$\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln 2x}\leqslant\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

donc

$$\frac{x}{\ln 2x}\leqslant\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

puis

$$\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\to+\infty$$

c) Par intégration par parties

$$\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{2x}-\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or quand $x\to+\infty$,

$$\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{2x}\to 0\text{ et }\left|\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x}\to 0$$

donc

$$\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\to 0$$

Exercice 90 : [énoncé]
a) Quand $x\to 0^+$, par croissance de la fonction exponentielle

$$\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^x}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\mathrm{e}^x\ln 2\leqslant\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\mathrm{e}^{2x}\ln 2$$

puis par encadrement

$$\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t\to\ln 2$$

b) Quand $x\to+\infty$, par décroissance de la fonction $t\mapsto\mathrm{e}^{1/t}$

$$\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^{1/2x}}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^{1/x}}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$e^{1/x}\ln 2\int_x^{2x}\frac{e^{1/t}}{t}\,dt\leqslant e^{1/2x}\ln 2$$

puis par encadrement

$$\int_x^{2x}\frac{e^{1/t}}{t}dt\to\ln 2$$

c) Quand $x\to+\infty$, pour x assez grand, la fonction $t\mapsto\cos(1/t)$ est croissante sur $[x,2x]$ donc

$$\int_x^{2x}\frac{\cos(1/x)}{t}\,dt\leqslant\int_x^{2x}\frac{\cos(1/t)}{t}\,dt\leqslant\int_x^{2x}\frac{\cos(1/2x)}{t}\,dt$$

puis

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right)\ln 2\leqslant\int_x^{2x}\frac{\cos(1/t)}{t}\,dt\leqslant\cos\left(\frac{1}{2x}\right)\ln 2$$

et par encadrement

$$\int_x^{2x}\frac{\cos(1/t)}{t}\,dt\to\ln 2$$

Exercice 91 : [énoncé]
f est continue sur un segment, elle y est donc bornée par un certain M et alors

$$\left|\int_0^1 t^nf(t)\,dt\right|\leqslant\int_0^1|t^n|\,|f(t)|\,dt\leqslant M\int_0^1 t^n\,dt=\frac{M}{n+1}\to 0$$

Exercice 92 : [énoncé]
On a

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt-f(0)\right|\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x|f(t)-f(0)|\,dt$$

Par la continuité de f en 0, Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ x\leqslant\alpha\Rightarrow|f(x)-f(0)|\leqslant\varepsilon$$

et donc

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-f(0)\right|\leqslant\varepsilon$$

On peut donc conclure que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=f(0)$$

On peut aussi très efficacement obtenir le résultat en introduisant une primitive de f et en exploitant

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\frac{F(x)-F(0)}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}F'(0)=f(0)$$

Exercice 93 : [énoncé]
Introduisons

$$F:x\mapsto\int_0^x f(t)\,dt\text{ et }G:x\mapsto\int_0^x tf(t)\,dt$$

Par intégration par parties

$$G(x)=xF(x)-\int_0^x F(t)\,dt=\int_0^x[F(x)-F(t)]\,dt$$

Cas F n'est pas de signe constant
Il existe alors $a,b\in\,]0,1[$ tel que

$$F(a)=\min_{[0,1]}F<0\text{ et }F(b)=\max_{[0,1]}F>0$$

Par intégration d'une fonction continue, non nulle et de signe constant sur un intervalle non singulier, on a

$$G(a)<0\text{ et }G(b)>0$$

et le théorème des valeurs intermédiaires assure que G s'annule.
Cas F est de signe constant
Quitte à considérer $-f$, supposons F positive.
Si F est nulle, il en est de même de f et la propriété est immédiate, sinon, on peut introduire $b\in\,]0,1[$ tel que

$$F(b)=\max_{[0,1]}F>0$$

On a alors

$$G(b)>0\text{ et }G(1)=-\int_0^1 F(t)\,dt<0$$

car $F(1)$ est nul.
A nouveau, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

Exercice 94 : [énoncé]
On introduit F une primitive de la fonction continue f.
La fonction $x \mapsto F(x+T) - F(x)$ est constante, elle est donc de dérivée nulle et par suite $f(x+T) - f(x) = 0$.

Exercice 95 : [énoncé]
Unicité : soient F et G deux primitives solutions. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F = G + C$.

$$\int_0^1 F = 0 = \int_0^1 G$$

donne alors $C = 0$ puis $F = G$.
Existence : Posons $\mathcal{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction

$$F : x \mapsto \mathcal{F}(x) - \int_0^1 \mathcal{F}(u)\,\mathrm{d}u$$

résout le problème.

Exercice 96 : [énoncé]
a) Puisque $f(0) = 0$, on a

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|f(x)| \leqslant \left(\int_0^x \mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

et donc

$$f(x)^2 \leqslant x \int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant x \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x \left(\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

b) En reprenant ce qui précède

$$\int_0^{1/2} f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{1/2} x \left(\int_0^{1/2} f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^{1/2} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Sachant $f(1) = 0$, on a aussi de façon symétrique

$$\int_{1/2}^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_{1/2}^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

et en sommant ces deux majorations, on obtient

$$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 97 : [énoncé]
a) Par intégration par parties, on obtient

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

b) On en déduit

$$I_{p,q} = \frac{q(q-1)\dots 1}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)} I_{p+q,0}$$

or

$$I_{p+q,0} = \frac{(b-a)^{p+q+1}}{p+q+1}$$

donc

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}(b-a)^{p+q+1}$$

Exercice 98 : [énoncé]
a) En appliquant le changement de variable $u = \pi/2 - t$ on obtient

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n u\,\mathrm{d}u$$

$t \mapsto \sin^n t$ est continue, positive sans être la fonction nulle et $0 < \pi/2$ donc $I_n > 0$
b) Par intégration par parties

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin t \sin^{n+1} t\,\mathrm{d}t = \left[-\cos t \sin^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t\,\mathrm{d}t$$

donc

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)\sin^n t\,\mathrm{d}t = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

puis

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

c)

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

sachant $I_0 = \pi/2$.

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{2p-2}{2p-1}\cdots\frac{2}{3}I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

sachant $I_1 = 1$.
d) Posons $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$. On

$$u_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1} = u_n$$

et $u_0 = I_1I_0 = \pi/2$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \pi/2$$

Pour tout $t \in [0, \pi/2]$,

$$\sin^{n+2} t \leqslant \sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$$

donc

$$I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

e) On a

$$\frac{n+1}{n+2}I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

donc $I_{n+1}/I_n \to 1$. Ainsi $I_{n+1} \sim I_n$.
Par suite

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)I_{n+1}I_n \sim nI_n^2$$

et donc

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

sachant $I_n > 0$.

Exercice 99 : [énoncé]
a) On a

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}}{n!}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n!} \to 0$$

donc par encadrement $I_n \to 0$.
b) Par intégration par parties

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

c) Pour $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k!} = I_{k-1} - I_k$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n I_{k-1} - I_k = 1 + I_0 - I_n$$

avec

$$I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$$

Exercice 100 : [énoncé]
a) $I_0 = \mathrm{e} - 1$.
$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_1^{\mathrm{e}} = 1$.
b) Par intégration par parties

$$I_{n+1} = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (n+1)I_n$$

c) Par intégration d'une fonction continue, positive et non nulle, on a $I_n > 0$.
Puisque $I_{n+1} > 0$, on a aussi $I_n < \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.
d) Par encadrement $I_n \to 0$.
Puisque $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n \to 0$ on a $(n+1)I_n \to \mathrm{e}$ puis

$$I_n \sim \frac{\mathrm{e}}{n+1} \sim \frac{\mathrm{e}}{n}$$

e) On a

$$D_{n+1} = (n+1)D_n$$

donc $D_n = n!D_0$.
Si $a \neq I_0$ alors $D_n \to +\infty$ puis $|u_n| \geqslant D_n - I_n \to +\infty$.

Exercice 101 : [énoncé]
a) $f : t \mapsto \frac{\cos(nt)-\cos(nx)}{\cos t - \cos x}$ est définie et continue sur $[0,\pi] \setminus \{x\}$.
Sachant

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$$

on obtient

$$f(t) = \frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}\sin\frac{n(t+x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}\sin\frac{t+x}{2}} \underset{t\to x}{\sim} n\frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

On peut donc prolonger f par continuité en x ce qui assure l'existence de I_n.
b) On a :

$$I_{n+1} + I_{n-1} = \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)t + \cos(n-1)t - (\cos(n+1)x + \cos(n-1)x)}{\cos t - \cos x}\,\mathrm{d}t$$

$$I_{n+1} + I_{n-1} = \int_0^\pi \frac{2\cos(nt)\cos t - 2\cos(nx)\cos x}{\cos t - \cos x}\,\mathrm{d}t$$

$$I_{n+1}+I_{n-1} = 2\int_0^\pi \frac{\cos(nt)\cos t - \cos(nt)\cos x}{\cos t - \cos x}\,\mathrm{d}t + 2\cos x\int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos t - \cos x}\,\mathrm{d}t$$

enfin

$$I_{n+1} + I_{n-1} = 2\int_0^\pi \cos(nt)\,\mathrm{d}t + 2\cos x . I_n = 2\cos x . I_n$$

(I_n) est une suite récurrente linéaire double d'équation caractéristique $r^2 - 2\cos x r + 1 = 0$ de racines e^{ix} et e^{-ix}.
Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \lambda\cos(nx) + \mu\sin(nx)$$

$I_0 = 0$ et $I_1 = \pi$ donc $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{\pi}{\sin x}$ d'où

$$I_n = \pi\frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

Exercice 102 : [énoncé]
a) $u_0 = 1/2$, $u_1 = \ln 2$ et $u_2 = \pi/4$.
b) On a

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\,\mathrm{d}x$$

or la fonction

$$x \mapsto \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}$$

est continue, positive sans être la fonction nulle et $0 < 1$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
c) On a

$$|u_n - 1| = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x^n} \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$

donc $u_n \to 1$.
d) Par intégration par parties

$$I_n = \int_0^1 x\frac{x^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

e) On a

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$

car il est connu que $\ln(1+t) \leqslant t$ pour $t > -1$.
On a alors

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \to 0$$

donc

$$u_n = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 103 : [énoncé]
Par intégration par parties, on obtient pour $q \neq 0$

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}$$

Puisque $I_{n,0} = \frac{1}{n+1}$, on obtient

$$I_{p,q} = \frac{q!p!}{(p+q+1)!}$$

Exercice 104 : [énoncé]
a) Pour $n \geqslant 2$, par intégration par parties (avec $u' = \sin t$ et $v = \sin^{n-1} t$)

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

donc

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

b) $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$ puis

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Exercice 105 : [énoncé]
On a
$$2^n I_n = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$$
où l'on remarque que la fonction $t \mapsto 2t/(1+t^2)$ croît de $[0,1]$ sur $[0,1]$.
Introduisons
$$J_n = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \underset{t=\tan x/2}{=} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \,\mathrm{d}x$$
On sait
$$J_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$
(via $nJ_nJ_{n+1} = \pi/2$ et $J_n \sim J_{n+1}$, cf. intégrales de Wallis)
Montrons $2^n I_n \sim J_n$ en étudiant la différence
$$J_n - 2^n I_n = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$$
On a
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$$
et le changement de variable $t = \tan x/2$ donne
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \cos x(\sin x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$
On peut alors affirmer
$$2^n I_n - J_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
puis
$$2^n I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$
et finalement
$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^n\sqrt{2n}}$$

Exercice 106 : [énoncé]
a)
$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$
donc $I_n \to 0$.
De plus, pour tout $x \in [0,1]$,
$$\frac{x^n}{x+1} \leqslant \frac{x^{n+1}}{x+1}$$
donc $I_n \leqslant I_{n+1}$.
b)
$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$
donc
$$I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k} + (-1)^n I_0$$
c) $I_0 = \ln 2$ et $(-1)^n I_n \to 0$ donc
$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{-k}}{k} + \ln 2 \to 0$$
puis la conclusion.
d) Comme ci-dessus, $J_n \to 0$. De plus
$$J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$
donc
$$J_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k}}{2k+1} + (-1)^n J_0$$
puis
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} + \frac{\pi}{4} \to 0$$
d'où
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \to \frac{\pi}{4}$$

Exercice 107 : [énoncé]
a) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
b) Par sommation géométrique
$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

c) $\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ par intégration d'une fonction positive sur $[0,1]$.
De plus

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}$$

car $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$.
d) On a

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{2k}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k}\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \to \frac{\pi}{4}$$

car

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \to 0$$

Exercice 108 : [énoncé]
a) $\int \frac{x^5}{1+x^{12}}\,\mathrm{d}x \underset{u=x^6}{=} \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{6}\arctan x^6 + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.
b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-1)} = \int -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + C^{te}$ sur $]-\infty,-1[\,,]-1,0[\,,]0,1[$ ou $]1,+\infty[$.
c) $\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.
d) $\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)^2+1} = \arctan(x-1) + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.
e) $\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)-2}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.
f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C^{te}$ sur $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$.
g) $\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x =$
$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^{te}$ sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.
h) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C^{te}$ sur $]-\infty,1[$ ou $]1,+\infty[$.
i) $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \arctan x + C^{te}$ sur $]-\infty,-1[,\ ]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$.
j) $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$ puis
$\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.
k) $\frac{1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-1/3}{(x-j)^2} + \frac{-1/3}{(x-j^2)^2} + \frac{2/3}{x^2+x+1}$ donc
$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.
l) $\int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x$ donc
$\int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1) + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 109 : [énoncé]
a) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
b) $\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
c) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\arctan x}{x+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$
$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{-x+1}{x^2+1}$ donc
$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + C^{te}$
puis $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8} = \frac{\ln 2}{4}$.

Exercice 110 : [énoncé]
a) f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc possède une unique primitive s'annulant :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Immédiatement

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan x$$

c) Par le changement de variable

$$F_2(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int_0^{\arctan x} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\tan^2\theta} = \int_0^{\arctan x} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

puis

$$F_2(x) = \frac{1}{4}\sin 2\arctan x + \frac{1}{2}\arctan x$$

et donc

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x$$

d) Astucieusement

$$F_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = F_n(x) - \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

puis par intégration par parties :

$$F_{n+1}(x) = F_n(x) + \left[\frac{1}{2n}\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x - \frac{1}{2n}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

et donc

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}F_n(x)$$

e) En particulier

$$F_3(x) = \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8}\arctan x$$

Exercice 111 : [énoncé]

a) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1} = \int 1 - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = x - \ln(\mathrm{e}^x+1) + C^{te}$.

b) Sur $\mathbb{R}$,

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x} \underset{u=\mathrm{e}^x}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2(u+1)} = -\ln|u| + \ln|u+1| - \frac{1}{u} + C^{te} = -x + \ln(\mathrm{e}^x+1) - \mathrm{e}^{-x} + C^{te}$.

c) Sur $[0,+\infty[$,

$\int \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x \underset{t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{=} \int \frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = 2\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + C^{te}$.

d) Sur $\mathbb{R}$,

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} \underset{u=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+1} + C^{te} = \ln(\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1) - x + C^{te}$.

Exercice 112 : [énoncé]

Par le changement de variable $u = \sqrt{\mathrm{e}^x+1}$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\mathrm{e}+1}} \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2-1} = \left[\ln\frac{u-1}{u+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\mathrm{e}+1}} = \ln\frac{(\sqrt{\mathrm{e}+1}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{\mathrm{e}+1}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

Exercice 113 : [énoncé]

a) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \underset{u=\sin x}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{u+\sqrt{2}} - \frac{1}{u-\sqrt{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sin x+\sqrt{2}}{\sin x-\sqrt{2}}\right| + C^{te}$$

b) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x \underset{u=\cos x}{=} \int -\frac{\mathrm{d}u}{2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos x-\sqrt{2}}{\cos x+\sqrt{2}}\right| + C^{te}$$

c) Sur $I_k = \left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[, k\in\mathbb{Z}$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} \underset{u=\tan x}{=} \int 1+u^2\,\mathrm{d}u = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C^{te}$$

d) Sur $I_k = \left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[, k\in\mathbb{Z}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos(x)\mathrm{d}x}{(1-\sin^2(x))^2} \underset{t=\sin x}{=} \int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}$$

donc

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x} = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + C^{te}$$

Exercice 114 : [énoncé]

Sur $I_k =]-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi[$ avec $k\in\mathbb{Z}$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x} \underset{t=\tan x/2}{=} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + C^{te}$$

La fonction $x\mapsto \frac{1}{3+\cos x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, cherchons F primitive de celle-ci sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, F est primitive sur I_k, donc il existe $C_k\in\mathbb{R}$ tel que sur I_k,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + C_k$$

Par limite à droite et à gauche en $\pi+2k\pi$,

$$F(\pi+2k\pi) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_k = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{k+1}$$

Par suite

$$\forall k\in\mathbb{Z}, C_k = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + C_0$$

On peut résumer :

$$\exists C_0\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + C_0 & \text{si } x\in I_k \\ \frac{2k+1}{2\sqrt{2}}\pi + C_0 & \text{si } x = \pi+2k\pi \end{cases}$$

Ceci détermine la fonction F à une constante près.

Inversement, étant assuré de l'existence de F, on peut affirmer que de telles fonctions sont bien primitives de $x\mapsto\frac{1}{3+\cos x}$.

Exercice 115 : [énoncé]
L'intégrale est bien définie et détermine la primitive s'annulant en 0 de la fonction continue

$$x \mapsto \frac{1}{3+\cos^2 x}$$

Notons F cette primitive.
Pour calculer, l'intégrale on est tenté de procéder au changement de variable $u = \tan t$ mais celui-ci n'est possible que pour $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ et alors

$$F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}u}{(4+3u^2)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x\right)$$

Par continuité

$$F(\pi/2) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \text{ et } F(-\pi/2) = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

Puisque la fonction intégrée est π-périodique, on a

$$F(x+\pi) - F(x) = C^{te}$$

avec

$$C^{te} = F(\pi/2) - F(-\pi/2) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

On peut alors calculer $F(x)$ en commençant par déterminer $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x + k\pi \in \left]-\pi/2, \pi/2\right]$$

puis en exploitant

$$F(x) = F(x+k\pi) - \frac{k\pi}{2\sqrt{3}}$$

avec

$$F(x+k\pi) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x\right)$$

Exercice 116 : [énoncé]
a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} \underset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
b) $\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x\cos x} \underset{t=\tan x}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
c) Par la relation de Chasles

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} + \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$$

Via des changements de variable affines adéquates :

$$I = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$$

Sur $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} \underset{t=\tan x}{=} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$$

Soit F une primitive de $\frac{1}{1+\cos^2 x}$ sur $[0, \pi/2]$.
Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$ sur $\left[0, \pi/2\right[$ et par continuité

$$F(\pi/2) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C$$

Finalement $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = [F(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ puis $I = \sqrt{2}\pi$.

Exercice 117 : [énoncé]
Par le changement de variable $t = \tan x/2$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)+(1-\cos\alpha)t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\left[\arctan\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}t\right]_0^1 = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \mathrm{arct}$$

et finalement

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha\cos x}\,\mathrm{d}x = 2\arctan\sqrt{\frac{\sin^2\alpha/2}{\cos^2\alpha/2}} = \alpha$$

Exercice 118 : [énoncé]
a) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\mathrm{th}x}{1+\mathrm{ch}x}\mathrm{d}x \underset{u=\mathrm{ch}x}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)} = \ln\mathrm{ch}x - \ln(\mathrm{ch}x+1) + C^{te}$.
b) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\mathrm{ch}x}{1+\mathrm{ch}^2 x}\mathrm{d}x \underset{u=\mathrm{sh}x}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\frac{\mathrm{sh}x}{\sqrt{2}} + C^{te}$.
c) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}x+\mathrm{ch}x} \underset{u=\mathrm{th}x}{=} \int -\frac{\mathrm{d}u}{(u-1)(u+1)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{th}x+1}{\mathrm{th}x-1}\right| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\mathrm{th}x} + C^{te}$
ou encore $\int \frac{\mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}x+\mathrm{ch}x} = \int \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2\mathrm{e}^x}dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4\mathrm{e}^{2x}} + C^{te}$.
d) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^3 x} = \int \frac{\mathrm{ch}x}{(1+\mathrm{sh}^2 x)^2}\,\mathrm{d}t \underset{t=\mathrm{sh}x}{=} \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan\mathrm{sh}x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^2 x} + C^{te}$

Exercice 119 : [énoncé]
Par changement de variable

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} \underset{t=\mathrm{e}^x}{=} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\arctan \mathrm{e} - \frac{\pi}{2}$$

Exercice 120 : [énoncé]
a) Sur $[-1,+\infty[$,
$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+1}} \underset{u=\sqrt{x+1}}{=} \int \frac{2u(u^2-1)}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int 2u(u-1)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}^3 - x + C^{te}$.
b) Sur $[0,+\infty[$,
$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \underset{u=\sqrt{x}}{=} \int 2u\frac{1-u}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\int -u+2-\frac{2}{1+u}\,\mathrm{d}u = -x+4\sqrt{x}-4\ln(1+\sqrt{x})+C^{te}$.
c) Sur $]-\infty,1]$ ou $]2,+\infty[$,
$\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2y^2\,\mathrm{d}y}{(y-1)^2(y+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{y-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C^{te}$
donc $\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{|x-1|}-\sqrt{|x-2|}}{\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x-2|}} + C^{te}$.

Exercice 121 : [énoncé]
a) Sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$, $\int \frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x \underset{x=\sqrt{2}\sin t}{=} \int \sqrt{2}\sin t + 1\,\mathrm{d}t = -\sqrt{2}\cos t + t + C^{te} = -\sqrt{2-x^2} + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C^{te}$.
b) Sur $]1,3[$,
$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} \underset{x=2+\sin t}{=} \int 2+\sin t\,\mathrm{d}t = 2\arcsin(x-2) - \sqrt{(x-1)(3-x)} + C^{te}$.
c) $x - x^2 + 6 = -(x-3)(x+2)$, $x = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sin t$. Sur $[-2,3]$,
$\int \sqrt{x-x^2+6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{25}{4}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{25}{8}\int \cos 2t + 1\,\mathrm{d}t = \frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2+6} + \frac{25}{8}\arcsin\frac{2x-1}{5} + C^{te}$
d) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \underset{x=\operatorname{sh}t}{=} \int \operatorname{sh} t + 1\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C^{te}$.
e) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1+x^2}} \underset{x=\operatorname{sh}t}{=} \int \frac{\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t} = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{4}\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} + C^{te}$.
f) Sur $[1,+\infty[$ (et de même sur $]-\infty,-1]$)
$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x \underset{x=\operatorname{ch}t}{=} \int \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}t}\,\mathrm{d}t \underset{u=\operatorname{sh}t}{=} \int \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{x^2-1} - \arctan\sqrt{x^2-1} + C^{te}$.

Exercice 122 : [énoncé]
On écrit le trinôme sous forme canonique

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

ce qui invite au changement de variable

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}t,\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t$$

qui donne

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3}\operatorname{sh}t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^2 t - 1} \underset{u=\operatorname{ch}t}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}$$

et enfin

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}} + C^{te}$$

Exercice 123 : [énoncé]
a) $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+3)} \underset{t=\sqrt{x}}{=} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_1^3 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.
b) $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}(x+4)} \underset{t=\sqrt{x+1}}{=} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.
c) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \underset{u=\sqrt{1+x}}{=} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2u\ \mathrm{d}u}{u+\sqrt{2-u^2}} \underset{u=\sqrt{2}\sin\theta}{=} 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{4t(1-t^2)\ \mathrm{d}t}{(-t^2+2t+1)(1+t^2)^2} = 2\sqrt{2}\int_0^1 -\frac{1}{1+t^2} + 2\frac{1+t}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{t^2-2t-1}\mathrm{d}t$
Au final $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{2} - 2\ln(\sqrt{2}+1)$.

Chapitre 1

Les séries numériques

Exercice 1 *Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :*

$$a)\ u_n = \frac{n}{n^2+1} \qquad b)\ u_n = \frac{ch(n)}{ch(2n)}$$
$$c)\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \qquad d)\ u_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 2 *Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :*

$$a)\ u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad b)\ u_n = \frac{1}{n\cos^2 n} \quad c)\ u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Exercice 3 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.*
a) On suppose qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que $u_n = O(v_n)$.
b) On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha > 1$$

Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la srie $\sum u_n$ converge.
c) On suppose cette fois-ci que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha < 1$$

Montrer que la série $\sum u_n$ diverge

Exercice 4 *a) Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0\ ;\ \sum |v_n| \text{ converge et } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$$

Montrer que $(n^\lambda u_n)$ converge.
b) Nature de la série de terme général

$$\frac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}\ ?$$

Exercice 5 *Soient*

$$u_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^{n} (3k-2) \text{ et } v_n = \frac{1}{n^{3/4}}$$

a) Montrer que pour n assez grand,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

b) En déduire que $\sum u_n$ diverge. (on pourra utiliser $\frac{u_n}{v_n}$)

Exercice 6 *Déterminer la nature de $\sum u_n$ pour :*

$$a)\ u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad b)\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$c)\ u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right) \qquad d)\ u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$$

Exercice 7 *Déterminer la nature de*

$$\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right)$$

Exercice 8 *Déterminer la nature de $\sum u_n$ pour :*

$$a)\ u_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n} \quad b)\ u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)} \quad c)\ u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}$$

Exercice 9 *Convergence de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.*

Exercice 10 *Nature de la série de terme général*

$$u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$$

Exercice 11 *Montrer la divergence de la série*

$$\sum \frac{\cos(\ln n)}{n}$$

Exercice 12 *Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.*
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$$

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
b) Mme question avec

$$v_n = \frac{u_n}{u_1 + \cdots + u_n}$$

On pourra étudier $\ln(1-v_n)$ dans le cadre de la divergence.

Exercice 13 *Soient* (a_n) *une suite de réels strictement positifs et* $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

a) On suppose que la série $\sum a_n$ *converge, donner la nature de* $\sum a_n/S_n$.

b) On suppose que la série $\sum a_n$ *diverge, montrer*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \frac{a_n}{S_n^2} \leqslant \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$

En dduire la nature de $\sum a_n/S_n^2$.

c) On suppose toujours la divergence de la série $\sum a_n$.

Quelle est la nature de $\sum a_n/S_n$ *?*

Exercice 14 *a) Justifier la convergence de la série numérique*

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$$

On pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

b) Montrer que

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

c) Déterminer un équivalent de R_n.

d) Donner la nature de la série de terme général R_n.

Exercice 15 *On rappelle la convergence de l'intégrale de Dirichlet*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

En observant

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t}\,\mathrm{d}t$$

dterminer le signe de I.

Exercice 16 *Soit* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite définie par* $a_0 \in \mathbb{R}^{+\star}$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n}$$

a) Etudier la convergence de la suite (a_n).

b) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

c) Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2.

d) Déterminer la nature de la série de terme général a_n *à l'aide de la série*

$$\sum \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$